Riemann の ζ 関数の近似式

柊 原 健 明

(受理 昭和 50 年 5 月 31 日)

APPROXIMATE FORMULAE FOR THE RIEMANN ZETA FUNCTION

Kenmei KUKIHARA

Modified approximate formulae of $\zeta(z)$ are given.

1. 序

Riemann の ζ 関数

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\ ,\ (R_e z>1) \tag{1}$$

の漸近展開として，公式集等[1)2)] には

$$\zeta(z)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^z}+\frac{1}{(z-1)n^{z-1}}-\frac{1}{2n^z}+\frac{z}{12n^{z+1}}-\frac{z(z+1)(z+2)}{720\,n^{z+3}}+\frac{z(z+1)\cdots(z+4)}{30240\,n^{z+5}}-\cdots \tag{2}$$

が与えられている．又，$0<R_e z<1$ の範囲では数学辞典[3)] によると，Hardy-Littlewood の近似関数等式

$$\zeta(z)=\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^z}+\chi(z)\sum_{n\leq y}\frac{1}{n^{1-z}}+(\text{補正項}) \tag{3}$$

$$\text{但し}\quad 2\pi xy=I_m z\ ,$$

$$\chi(z)=2^z\pi^{z-1}\sin(\pi z/2)\Gamma(1-z) \tag{4}$$

が大切であるとされている．

式 (2) の初項は $n\to\infty$ での収束域が $R_e z>1$ であるので，これを収束範囲の広い $(R_e z>0)$[1)] $\sum(-1)^{n-1}n^{-z}$ の型に代えれば補正項が小さくなろうということ，それから z が分母のみに現れる様な展開というものは存在し得ないのであろうかということとで以下に探索を行う．

(3) 式の部分和 (初項と第 2 項) のいずれも，$0<R_e z<1$ に於ては和を無限にとると発散する級数である．この 2 項は互に適当に打消し合つて補正項を小さくさせているというのが Hardy-Littlewood の発見であろう．しかし，もしこれも収束するタイプの級数の部分和で置き換えることができれば近似の精度が上るかもしれないと期待してよいであろう．

複素平面全体に解析接続された ζ 関数については前世紀からぼう大な研究があり，以下の結果がオリジナルでない確率は小さくないが未だ調べきれない．鹿大には Titchmarsh[4)] が備えてある．

2. 漸近展開について

最も簡単には，公式[1)]

$$(1-2^{1-z})\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-z} \tag{5}$$

に Euler-Maclaurin の求和公式を適用して[5)]

$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r^z}+\frac{1}{2n^z}-\frac{z}{4n^{z+1}}+\frac{1}{48}\frac{z(z+1)(z+2)}{n^{z+3}}-\cdots \tag{6}$$

を得る．(2) 式の第 2 項に相当するものがなくなつている．同様の式は次の積分表示[6)] からも得る．

$$-\frac{4\pi i(1-2^{-z})}{\Gamma(1-z)}\zeta(z)=\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{z-1}\operatorname{cscht}\,dt \tag{7}$$

積分路を次の様に変形する，

$$\infty+(m+1/2)\pi i\to-\infty+(m+1/2)\pi i\to-\infty-(m+1/2)\pi i\to\infty-(m+1/2)\pi i$$

m は偶数とする．留数を集めて，

$$(7)=4i\pi^z\sin(\pi z/2)\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}r^{z-1}+i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\frac{(-t-i(m+1/2)\pi)^{z-1}+(-t+i(n+1/2)\pi)^{z-1}}{cht} \tag{8}$$

これは $0<R_e z<1$ で $m\to\infty$ にすると第1項は $(1-2^z)\zeta(1-z)$，第2項は0になるので関数等式[4)]

$$\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)=\Gamma((1-z)/2)\pi^{(z-1)/2}\zeta(1-z) \tag{9}$$

の1つの証明となる．(8) の積分項は分母を展開して分子の偏角に注意しながら Laplace 変換の演算を進めると，(8) の第2項

$$=2i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\{(1-e^{-i\pi z})(2n+1)^{-z}e^{(2n+1)(m+1/2)\pi i}$$
$$\times\Gamma(z,(2n+1)(m+1/2)\pi i)+c.c.\} \tag{10}$$

但し $c.c.$ は複素共役である．不完全ガンマ関数 $\Gamma(z,p)$ について z が固定され p が大きいときの漸近式[12)]を用いて，結局，

$$-\frac{2\pi(1-2^{-z})}{\Gamma(1-z)}\zeta(z)=2\pi^z\sin\frac{\pi z}{2}\sum_{r=1}^{m}\frac{(-1)^{r-1}}{r^{1-z}}$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}\beta(r+1)\left[\frac{(1-e^{-i\pi z})(z-1)\cdots(z-r)}{((m+1/2)\pi i)^r}+c.c.\right] \tag{11}$$

但し $\beta(r+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)^{-r-1}$ (12)

$\approx 1.$ [7)]

(11) も分子に z が現れて変りばえがしない，この点の考察は次の節で行う．

数値計算の為には次の形の方が役に立ちそうである．展開式，[8)]

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{B_n x^{2n}}{(2n)!} \tag{13}$$

を利用して，(2)は，

$$\zeta(z)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^z}+\frac{1}{n^{z-1}}\left(\frac{1/n}{e^{z/n}-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)$$
$$-\frac{z(z+1)(z+2)-z^3}{720\,n^{z+3}}+\frac{z(z+1)\cdots(z+4)-z^5}{30240\,n^{z+5}}-\cdots \tag{14}$$

第3項以下の分子に現れる z の最高べきは消えてくれている．それ故 (13) からみたときの少くとも $|z|<2\pi n$ という限界を越える可能性があるかも知れない．

又これとは別に，real z のものについて，正項級数の加速法を利用した式[9)] を複素域に拡張してみると

$$\zeta(z)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^z}+\frac{z}{z-1}\frac{1}{(n+1)^z-n^z}$$
$$-\frac{1}{12\,n^{z+1}}+\frac{z+1}{24\,n^{z+2}}-\cdots \tag{15}$$

この式ではもつと調べないとわからないが，z=real のときは，第2項までの誤差が n^{-2z+1} のオーダーになるという．これは第1項のみのときにくらべて，部分和のとり方が $\sqrt{n}$ 個で済む点で次の節のものと関連がありそうである．更に加速を重ねる可能性も残されている．[9)10)]

3. 近似関数等式について

Riemann の積分表示[11)]を展開してみる．

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-z/2}\zeta(z)-\frac{1}{z(z-1)}$$
$$=\int_1^{\infty}dx\left(x^{-\frac{1-z}{2}-1}+x^{\frac{z}{2}-1}\right)\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2\pi x} \tag{16}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k^2\pi)^{\frac{z}{2}-\frac{1}{2}}\Gamma\left(-\frac{z}{2}+\frac{1}{2},\ k^2\pi\right)\right.$$
$$\left.+(z\to 1-z)\right] \tag{17}$$

ここでも (10) と同様に $\Gamma(z,p)$ が現れる．$\Gamma(z,p)$ の代りに $\gamma(z,p)=\Gamma(z)-\Gamma(z,p)$ の展開[12)] を使えば z が分母にくる．しかしながら，それは以上の段階では不可能である．和をとると必ず発散する部分があるからである．展開の問題は $\Gamma(z,p)$ の連分数展開[12)] を使つてみるとよくわかる．即ち，

$$(17)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{-k^2\pi}}{k^2\pi}+\frac{1-z/2}{1}+\frac{2-z/2}{k^2\pi}\right.$$
$$\left.+\cdots+(z\to 1-z)\right\} \tag{18}$$

これも近似式にはなり得る．連分数を展開しようとすれば $k^2\pi$ と $|z|/2$ との大きさによつて，z は分子にもくることになる．以上から z が分母に現れる展開のできる $\gamma(z,p)$ で $\zeta(z)$ を表すには，新しい表式を探す他にない．以下に行う．

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-\frac{z}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^z}=\int_0^{\infty}dx\,x^{\frac{z}{2}-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2\pi x} \tag{19}$$

テーター公式[13)] で

$$2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\pi(k+1/2)^2/x}=\sqrt{x}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2\pi x}\right) \tag{20}$$

を作つておくと，(19) は

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-\frac{z}{2}}\zeta(z)(2^{1-z}-1)=-\frac{1}{z}$$
$$+\int_1^{\infty}dx\,x^{-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{4}(2k+1)^2x}$$
$$+\int_1^{\infty}dx\,x^{\frac{z}{2}-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2\pi x} \tag{21}$$

となる．(21) と (21) で z を $1-z$ で置き換えたものとの両辺を加え合わせる，そして関数等式 (9) を使えば

$$\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)(2^{1-z}+2^z-2)$$
$$=-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}$$
$$+\int_1^\infty dx(x^{z/2-1}+x^{-z/2-1/2})\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\pi(2k+1)^2x/4}$$
$$+\int_1^\infty dx(x^{z/2-1}+x^{-z/2-1/2})\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\pi k^2x} \tag{22}$$

この式の両辺と Riemann の積分 (16) の両辺との差をとると，

$$\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)(1-2^{1-z})(1-2^z)$$
$$=\int_1^\infty dx(x^{z/2-1}+x^{-z/2-1/2})$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(e^{-k^2\pi x}-e^{-k^2\pi x/4})\right) \tag{23}$$

これが目的に適う新しい積分表示である．左辺からわかる様に $R_ez=0, 1$ 上に等間隔の零点と，いわゆる自明でない零点とを持つ整関数である．項別積分すると，

$$(23)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left\{\left(\frac{1}{k^2\pi}\right)^{z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2},k^2\pi\right)\right.$$
$$\left.+(z\to 1-z)\right\}$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left\{\left(\frac{4}{k^2\pi}\right)^{z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2},\frac{k^2\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+(z\to 1-z)\right\} \tag{24}$$

ここで $\Gamma(z,p)=\Gamma(z)-\gamma(z,p)$ を代入する．$\Gamma(z)$ の部分の係数になる k 和は $0<R_ez<1$ のときにのみ収束する．従つて

$$(24)=\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)(1-2^z)(1-2^{1-z})$$
$$+\Gamma((1-z)/2)\pi^{(z-1)/2}\zeta(1-z)(1-2^z)(1-2^{1-z})$$
$$+(\gamma(z/2\,,\,k^2\pi)\ \text{等のみの項}) \tag{25}$$

(23)〜(25) 及び (9) によつて，$0<R_ez<1$ のとき，

$$\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)(1-2^{1-z})(1-2^z)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}[(k^2\pi)^{-z/2}\gamma(z/2\,,\,k^2\pi)$$
$$+(k^2\pi)^{-(1-z)/2}\gamma(-(1-z)/2\,,\,k^2\pi)$$
$$-(k^2\pi/4)^{-z/2}\gamma(z/2\,,\,k^2\pi/4)$$
$$-(k^2\pi/4)^{-(1-z)/2}\gamma(-(1-z)/2\,,\,k^2\pi/4)] \tag{26}$$

を得る．$\gamma(a,x)$ を展開[14] して，

$$(26)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-k^2\pi}(k^2\pi)^r-e^{-k^2\pi/4}(k^2\pi/4)^r}{(z/2)(z/2+1)\cdots(z/2+r)}\right.$$
$$\left.+(z\to 1-z)\right] \tag{27}$$

用いた $\gamma(a,x)$ の展開は valid for all x[14] とある．少くともある条件下で k 和と r 和を交換してよかろうとしてみると，

$$(27)=\sum_{r=0}^{\infty}(a(r,1)-a(r,4))$$
$$\left(\frac{1}{(z/2)(z/2+1)\cdots(z/2+r)}+(z\to 1-z)\right) \tag{28}$$

$$\text{但し}\quad a(r,l)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}e^{-k^2\pi/l}(k^2\pi/l)^r \tag{29}$$

(29) は収束が非常に速い (r が小さいとき) ので数値を得るのは楽である．z が分母にのみ現れる展開は少くとも形式的にできたが，漸近展開になつているかどうかは疑わしいような気がする．$1/\Gamma(z)$ に対する Stirling の漸近展開が $z=$負の実軸の近くで用をなさないと同様に零点が並んでいる領域では，上の様な型の展開は役に立たないかも知れない．零点に近いとき主要項はキャンセルしてゆく筈の場所である．

そこで (24) 式に於て k 和を部分和にしてみる．展開された部分の項が先に行く程小さくなる様にするということを指針にすると，例えば

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(k^2\pi/l)^{-z/2}\Gamma(z/2,k^2\pi/l)$$
$$=\sum_{k<x}(-1)^{k-1}(k^2\pi/l)^{-z/2}(\Gamma(z/2)-\gamma(z/2,k^2\pi/l))$$
$$+\sum_{k>x}(-1)^{k-1}(k^2\pi/l)^{-z/2}\Gamma(z/2,k^2\pi/l)$$
$$=\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-z/2}l^{z/2}\sum_{k<x}\frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$
$$-\sum_{k<x}(-1)^{k-1}e^{-k^2\pi/l}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(k^2\pi/l)^r}{(z/2)(z/2+1)\cdots(z/2+r)}$$
$$+\sum_{k>x}(-1)^{k-1}e^{-k^2\pi/l}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_r}{k^2\pi(k^2\pi+1)\cdots(k^2\pi+r)} \tag{30}$$

但し，$\Gamma(z,p)$ の展開式は文献 15) による．

$$c_n=(\Gamma(1-z/2))^{-1}\int_0^\infty dt\, e^{-t}t^{-z/2}(-t)_n\,,$$

$$c_0=1\,,\quad c_1=-(1-z/2)\,,\quad c_2=\left(1-\frac{z}{2}\right)^2,$$

$$c_3=(1-z/2)(-3(2-z/2)^2-2)\,,\cdots$$

x は先の指針により，$x^2\pi/k=|z/2|$ でよい．

(30) を (24) で用いると，

$$\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)(1-2^z)(1-2^{1-z})$$
$$=\left(\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-z/2}\sum_{n<\sqrt{|z|/2\pi}}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}\right.$$
$$\left.-\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-z/2}2^z\sum_{n<\sqrt{2|z|/\pi}}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}\right)$$
$$+(z\rightarrow 1-z)$$
$$+\text{補正項} \tag{31}$$

これが近似関数等式 (3) について，序に記した目標に対する結果である．補正項というのは (30) に於る第2項，第3項からくるものである．これが補正項の資格を持つことは次の考察から予想される．即ち，(17) に (30) を用いて (31) を導いたのと同じことを行う．すると，

$$\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)$$
$$=\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\pi^{-z/2}\sum_{n<\sqrt{|z|/2\pi}}\frac{1}{n^z}$$
$$+\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\pi^{-(1-z)/2}\sum_{n<\sqrt{|1-z|/2\pi}}\frac{1}{n^{1-z}}$$
$$+\text{補正項} \tag{32}$$

ここで (31) のものと同様の補正項を得るが，(32) は $0<R_e z<1$, $I_m z\gg 1$ ということを考えると近似関数等式 (3) と実は同じものである．

4. 新しい積分表示について

積分表示 (23) は楕円テータ関数[16]を使つて，

$$\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}\zeta(z)(1-2^{1-z})(1-2^z)$$
$$=\int_1^\infty dx(x^{z/2-1}+x^{-z/2-1/2})(\vartheta_0(0,ix/4)$$
$$-\vartheta_0(0,ix))/2 \tag{33}$$

これを部分積分しても (28) を得る．

$$x^{1/4}(\vartheta_0(0,ix/4)-\vartheta_0(0,ix))/2\equiv f(x)\,, \tag{34}$$

$$z\equiv\frac{1}{2}+2u\,,\quad (33)\equiv Z(u)$$

と記すと，Jacobi の虚変換[16]と級数の組換えにより $f(x)=f(1/x)$ が導けるので，

$$Z(u)=Z(-u)=\int_1^\infty dx(x^{u-1}+x^{-u-1})f(x)$$
$$=\int_0^1 dx(x^{u-1}+x^{-u-1})f(x)$$
$$=\int_0^\infty dx\, x^{u-1}f(x)$$

等の関係がある．(33) と同じ積分を与える積分表示

$$\int_0^\infty dx\, x^{z-1}(\vartheta_3(0,ix^2)-\vartheta_0(0,ix^2)-\vartheta_2(0,ix^2))$$

が Mellin 変換表[17]にある．出典は不明である．当然のことであろうが，(33) に近い所は誰かが研究したのであろう．

5. 結　語

近似関数等式の $\sum 1/n^z$ は $\sum(-1)^{n-1}/n^z$ で置き換えられたので，当初の目的は達したと言つてよいだろう．

Titchmarsh[4] に "A different type of approximate formula has been obtaind by Meulenbeld." とあるのを見付けたので，ここに記すが，この人は $\sum_{n<x}\phi(n/x)/n^z$ で置き換えて改良に成功している．$\phi(u)$ は u が0から1に増すとき1から0に減少する関数（例えば $1-n/x$）というから，かなり人工的だという感じがする．が，我々のものは補正項の order estimate を当分やる予定はないので証価できる段階でもない．

6. 謝　辞

文献の借用に当り，田中助教授，村島助教授及び小柴助教授の御好意に感謝致します．

文　献

1) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信，数学公式，岩波，Ⅲ p. 18，ミスプリントあり
2) E. Jahnke, F. Emde, Tables of functions with formulas and curves, Dover Publ., New York, 1945
3) 日本数学会編，数学辞典第2版，岩波，p. 834
4) E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zetafunction, Oxford, 1951
5) 文献 1) Ⅱ p. 36
6) A. Erdélyi 他（編） Higher transcendental functions, McGraw-Hill, New York, 1953, I, p. 32
7) Abramowitz 他, Handbook of mathematical functions, Dover, New York, 1964, p. 812
8) 文献 1)，Ⅱ，p. 143
9) 一松　信，他，電子計算機のための数値計算 Ⅲ，培風館
10) 新谷尚義，数理科学講究録 107 数値解析の基礎理論，数理科学講究録刊行会，1971, p. 1
11) 文献1)，Ⅲ，p. 18 の式にはミスプリントがある（第12刷），積分の範囲が正しくない．

12) 文献 1), Ⅲ, p. 15
13) 三井孝美, 整数論, 至文堂, 1970
14) 文献 6), Ⅱ, p. 135
15) 文献 6), Ⅱ, p. 139
16) 文献 1), Ⅲ, ミスプリントがある
17) A. Erdélyi 他, Tables of integral transforms, McGraw-Hill, New York, 1954