

数学教育における表現活動に関する一考察

和田 信哉*

(2012年10月23日 受理)

Expressive Activity in Mathematics Education

WADA Shinya

要約

平成20年と21年に告示された小・中・高等学校の新しい学習指導要領では、言語活動の充実が謳われている。それに伴い、算数・数学科を対象にした数学教育に関する論考の中で、「表現活動」ということばを目にするようになったが、その意味は明確なものではない。そこで、本稿は、数学教育における表現活動の意味を検討することを目的とした。

その結果、主として次のことを指摘した。

- (1) 数学教育における表現には対象としての表現と方法としての表現がある。それらは主として視覚的な表現であり、聴覚的な表現は前者には含まれないが後者には含まれる。
- (2) 表現活動には「表現する」行為と「解釈する」行為が含まれ、後者には思考や判断、よさ・美しさの感得も含まれる。
- (3) 表現活動の過程には、一つの表現様式に対する構成、操作、解釈のサイクルから成る局所的な表現活動と、複数の表現様式に渡る連続的な意味の発展過程である大局的な表現活動とがある。
- (4) 説明する活動では、対象としての表現を明示しながら方法としての表現を用いることが必要であり、説明をする者だけでなく説明を受ける者に対する指導も重要である。

キーワード：対象としての表現，方法としての表現，表現と解釈，局所的・大局的な表現活動

* 鹿児島大学教育学部 准教授

1. はじめに

平成20年と21年に告示された小・中・高等学校の新しい学習指導要領では、言語活動の充実が謳われている。それに伴い、算数・数学科を対象にした数学教育に関する論考の中で、「表現活動」ということばを目にするようになった。従来、「表現する活動」ということばは数学教育において用いられることはあったが、「表現活動」ということばはほとんど用いられることはなかった。新しいことばを用いるのであれば、そのことばの意味をよく吟味する必要があるのだろうが、そのような検討を行っているものは皆無である。

そこで、本稿は、数学教育における表現活動の意味を検討することを目的とする。具体的には、はじめに数学教育における表現について検討し、次に数学教育において表現が強調されるようになった背景を概観する。その上で、数学教育における表現活動について検討することで、算数・数学科におけるその指導への一助としたい。

2. 数学教育における表現

(1) 中原の表現研究

中原(1995)は、数学教育における表現について、学習の目標にも、内容にも、方法にもなることを指摘し、個々の具体的な表し方である表現方法を類型化したものを表現様式と呼び、次の5つに分類している(pp.199-200)。

現実的表現：実世界の状況、実物による表現。具体物や実物による実験などはここに含まれる。

操作的表現：具体的な操作的活動による表現。人為的加工、モデル化が行われている具体物、教具等に動的操作を施すことによる表現。

図的表現：絵、図、グラフ等による表現。

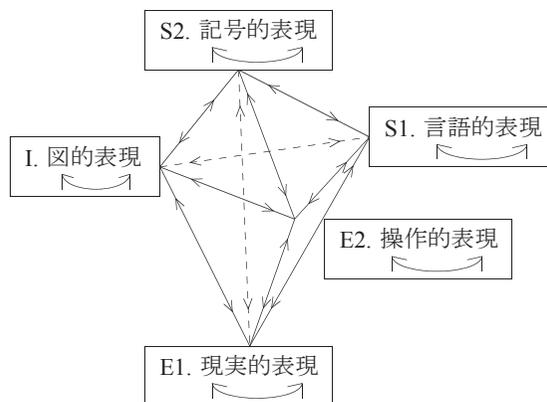


図1 数学教育における表現体系 (中原, 1995, p. 202)

言語的表現：日本では日本語，米国・英国等では英語など，各国の日常言語を用いた表現。またはその省略的表現。

記号的表現：数字，文字，演算記号，関係記号など数学的記号を用いた表現。

そして，これらの表現様式を，認知発達の順序性と相互変換性に着目し，図1のような表現体系としてまとめている (pp.201-202)。この表現体系は，下に配置されている表現様式から上に向かってその抽象性が上がっていくこともわかり，授業構成にも役立てることができるものとなっている。

(2) 対象としての表現と方法としての表現

中原の表現研究は，広島大学グループの一連の表記研究に連なるものである(※)。中原の研究の特徴の一つとして，それまではかかれた「表記」を対象としていたものを，現実的表現や操作的表現といった「視覚的な」表現にまで拡張したことが挙げられよう。先に述べたように，数学教育における表現は学習の対象にもなるし，学習の方法にも位置づく。方法としての表現は，いわばメタ表現の範疇となるものであるから，それは何らかの制限を受けるものではない。これに対し，対象としての表現は，数学的対象としてみなされなければならない。したがって，その表現は数学的な関係(代数的関係など)を示しうるものでなければならず，その特徴の一つとして，操作可能性が挙げられよう。数学における操作の重要性は，ピアジェの名前を挙げるまでもなく，それによって数学的関係が示されるといってもよい。したがって，かかれた表現である表記(記号的表現，言語的表現，図的表現)は形式的な操作が可能であるし，また具体的な表現(現実的表現，操作的表現)は具体物あるいは半具体物の操作的活動が可能であるから，視覚的な表現は対象としての表現としてみなされる。

これに対し，聴覚的な表現，すなわち話しことばはどうであろうか？もちろんメタ表現とみなすことはできるので方法としての表現であるが，対象としての表現とみなすことができるであろうか？言い換えれば，話しことばは操作可能であろうか？そう考えると，話しことばは操作可能ではないため，数学的対象としてみなすことはできず，したがって対象としての表現とみなすことはできない。

数学教育における表現は，以上のようにとらえることができ，従来の「表現する活動」はこのような表現を用いる活動である。それでは，なぜ表現が重視されるようになったのか，次節では，それを振り返ることによって「表現する活動」を「表現活動」に拡張する示唆を得たい。

3. 表現が強調される背景

(1) 学習指導要領の改訂

前述の学習指導要領改訂前に，いくつかの数学教育に関する国内外の調査結果が報告された。

例えば、IEA（国際教育到達度評価学会）のTIMSS2003（国立教育政策研究所, 2005b）、OECD（経済協力開発機構）のPISA（国立教育政策研究所, 2004）、国立教育政策研究所（2005a）の平成15年度教育課程実施状況調査である。TIMSS2003は、算数・数学の知識・理解の達成度を調査するものであり、2003年（平成15年）2月に小学校4年生と中学校2年生を対象にして実施された。PISAは、読解力と数学的リテラシー、科学的リテラシー、問題解決能力を調査するものであり、この内の数学的リテラシーは、数学を生活に生かそうとする能力の調査を目的とし、2003年（平成15年）7月に高等学校1年生を対象にして第2回の調査が実施された。また、教育課程実施状況調査は、小学校及び中学校の学習指導要領（平成10年告示）に基づく教育課程の実施状況について、学習指導要領における各教科の目標や内容に照らした学習の実現状況を把握するために、2004年（平成16年）の1月と2月に小学校5年生から中学校3年生までを対象にして実施された。これらの調査結果を総合すると、基礎的・基本的な知識・技能は低下していないけれども、学ぶ意欲の低さ、実生活との関連や解釈する力の低さ、論理的に考える力の低さ、考えなどを記述する力すなわち表現力の低さなどが明らかになった。

このような背景の下、2005年2月に教育課程の基準全体の見直しについて検討するよう文部科学大臣から第3期中央教育審議会に要請が行われ、それを引き継いだ第4期中央教育審議会が2008年に答申を行った（その間にも、国内外の調査結果がいくつか報告されたが、前述と同様の傾向を示すものであり、改めてそのような課題が浮き彫りとなった）。その中で、とりわけ表現に関わることとして、表現力の育成と言語活動の充実が強調されたのである。

表現力の育成は、算数・数学を活用する能力の育成に関連して、思考力・表現力・判断力の育成が強調された。つまり、課題として指摘されている活用する能力の育成には、基礎的・基本的な知識・技能の習得だけではなく、習得した知識や技能を用いて思考したり、表現したり、判断したりすることが必要とされるので、そのような能力を育成することが重視されたのである。それとともに、国語科だけでなく他の教科においても言語活動を重視することが強調されている。読解力の育成を全教科で行おうという意図があるのだが、もちろん、算数・数学科における目的・目標から言語活動を考える必要があることはいままでもない。

（2）数学の言語性

そもそも、数学は言語の一種であるという考えは多い。例えば、新井（2011）は、数学は自然言語と密接に関連しながら概念を扱うための方法論を構築してきた学問であり、数学の定義は、われわれの意識の中に潜む共通したイメージを発見し、言語化する働きがあること、また共通点を抜き出して数学のことばで表現する作業が公理化であることを指摘している。このような数学的な言語化によって、無意識から脱却でき、また数学のことばは、言語体系の中で位置づけられてはじめて真に意味をもつことも指摘している。このように、数学を創り上げる活動そのものが言語活動であることを指摘しているのである。また、数学的記号による表現そのものは、言語と

同様に文法があるため、言語の一種とみなすことができる。例えば、数学的記号による表現は、初源的記号を所定の構成規則に従って組み合わせたものである（中原，1995，p.252）。

また、読解力とも関連して、前述の数学的リテラシーという観点も、数学を言語とみなす観点といえよう。例えば、PISA では、数学的リテラシーは次のように定義されている。

数学が世界で果たす役割を見つけ、理解し、現在及び将来の個人の生活、職業生活、友人や家族や親族との社会生活、建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠にもとづき判断を行い、数学に携わる能力（国立教育政策研究所，2004，p.15）

つまり、生活や社会などにおける現象を数学によって記述し、その結果に基づいて思考・判断していく能力が重視されているので、数学という言語に翻訳する能力を重視していると言い換えてもよいであろう。

以上のような背景の下、数学的構造を探究する側面（構造指向）が強い言語活動としての表現と、数学的リテラシーとしての側面（応用指向）が強い表現が強調されている。これらのことをふまえると、数学教育における表現活動をどのようにとらえることができるのか、次節で検討する。

4. 数学教育における表現活動

（1）表現と解釈

表現活動ということばを考えるため、それをよく用いている芸術系の教科教育をみてみよう。そのような教科では、表現だけでなく、その鑑賞教育も重視している。例えば、前述の中教審答申において、図画工作科、美術科、芸術科（美術、工芸）の改善の基本方針の一つには、「よさや美しさを鑑賞する喜びを味わうようにするとともに、感じ取る力や思考する力を一層豊かに育てるために、自分の思いを語り合ったり、自分の価値意識をもって批評し合ったりするなど、鑑賞の指導を重視する」（p.97）ということが挙げられている。この後半部分とはもかく、前半部分については、数学教育についてかかれてあるものであったとしても違和感がないであろう。

また、幼稚園教育要領においては、感性と表現に関する領域として「表現」が規定されており、そのねらいとして次の3つが挙げられている。(1) いろいろなものの美しさなどに対する豊かな感性をもつ。(2) 感じたことや考えたことを自分なりに表現して楽しむ。(3) 生活の中でイメージを豊かにし、様々な表現を楽しむ（文部科学省，2008a，p.135）。また、言語活動に関わる領域「言葉」も規定されており、次の3つがねらいとして挙げられている。(1) 自分の気持ちを言葉で表現する楽しさを味わう。(2) 人の言葉や話などをよく聞き、自分の経験したことや考えたことを話し、伝え合う喜びを味わう。(3) 日常生活に必要な言葉が分かるようになるとともに、絵本や物語などに親しみ、先生や友達と心を通わせる（文部科学省，2008a，p.119）。両者の領

域で、表現することだけでなく、表現すること自体を楽しんだり、表現されたもののよさを感得したりすることがねらいとされており、やはり表現することと鑑賞することが重視されている。

つまり、数学教育においても、「表現する」ことだけでなくその表現されたものを「鑑賞する」という視点が、表現活動ということを考える上で必要となると考えられるのである。前述のように、従来の数学教育においては、「表現する」ということは重視されていた。これは、個人の思考を他者に向けて伝えるという意味合いが強く、逆に他者の思考を個人が受け取るという意味合いは弱かった。したがって、数学教育における表現活動では、表現を解釈することも重視するとともに、鑑賞するという視点を加味して、表現されたもののよさや美しさを味わうということも含めて考えるべきであろう。したがって、本稿では、表現を「解釈する」という行為の中に、このような意味を含ませることとする。

(2) 構造指向と応用指向の表現活動

ここではさらに、数学教育における表現活動の具体的な過程などについて検討したい。先に構造指向の表現と応用指向の表現があることを示唆したが、まずは、構造指向の表現について検討しよう。これに関連する先行研究として、平林・磯部（1965）の数学的表記過程の研究がある。平林らは、その過程について次のように述べている。

つまり数学的思考と一口にいわれるものの中で、(1) 事象の表記化、(2) 表記化された表記そのものの構成・縮合、(3) 表記の規則性の構成、(4) より高い事象の認識という過程をここでは数学的表記過程ということにした（平林・磯部，1965，p.11）。

これは、数学を創り上げていく過程を数学的言語を創り上げていく過程とみなした表現活動である。ただし、表現することに焦点が当てられており、解釈することが考慮されているとは言い難いので、その点を補って考える必要がある。

次に、応用指向の表現について検討しよう。これに関連する先行研究として、三輪（1996）の研究が挙げられる。三輪は、文字式利用の図式として図2を示している。

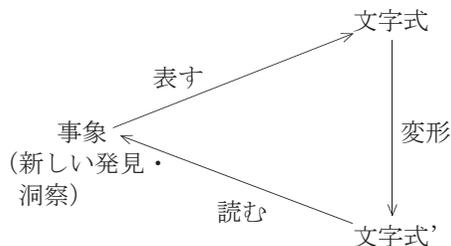


図2 文字式利用の図式（三輪，1996，p.2）

これは、ある事象を文字式で表し、それを目的に沿って規則に従いながら変形し、変形後の文字式を事象に照らし合わせて読むことによって新しい発見や洞察を得、さらにそれを文字式で表していく、というサイクルを説明するものである。このように、文字式（つまり、記号的表現）に限定したものはあるが、他の表現様式にも適用可能であると考えられ、次の図のように示すことができる（和田，2009）。

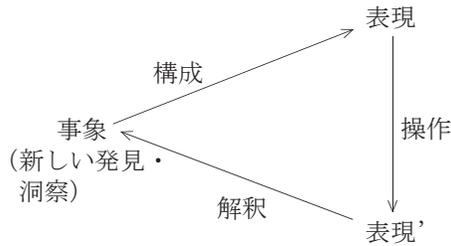


図3 表現を対象とした数学的活動の図式（和田，2009，p.17）

これは、ある事象からある表現を構成し、それに目的に沿った操作的活動あるいは形式的操作を加え、操作後の表現を事象に照らし合わせて読むことによって新しい発見や洞察を得、さらにそれから表現を構成していく、というサイクルを説明している。図3のように考えれば、図2のアイデアをすべての表現様式について適用することができ、対象としての表現の特徴となる操作も含まれ、また鑑賞に関わる解釈も含めて考えることができる。さらに、平林らの数学的表記過程の各段階は、図3のサイクルを通して進展するとみることができるので、構造指向の表現活動も説明するものであると考える。

（3）記号論的にみた表現活動

次に、数学教育における表現活動について、記号論の観点からも検討してみよう。記号論といってもいくつかの視座があるが、本稿では、パースの記号論を数学教育的に解釈した視座（和田，2008）に基づいて検討していく。この視座では、ある記号を「表意体」、「対象」、「解釈項」の三つ組みとしてみなす。表意体とは記号媒体そのもののことであり、ここでは、数学教育における表現様式がこれに当たるものとして考える。つまり、対象としての表現を表意体とする。そして、対象とはその表現が指示する対象のことである。また、解釈項とは、その表現と対象を結

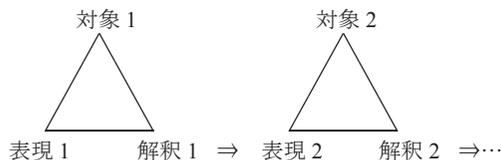


図4 意味の発展モデル（和田，2008，p.11 の一部改変）

びつける解釈などを他の表現で表す過程とその所産を含めたもののことである。つまり、ある記号が他の記号を連続的に生み出し、その過程が意味の発展であるととらえるものである(図4)。

このような視座から、表現と対象の関係の進展を説明することが可能となる。つまり、はじめは表現が対象とほぼ同じものとみなされていたものが、徐々に表現と対象が分離していくという過程のことである。換言すれば、対象がそれとほぼ同じである現実的表現から、対象がそれと全く異なる記号的表現までの表現体系の進展によって、抽象的な数学的概念が構成されていくということである。必ずしも直線的にそのように進展するわけではないが、理想的な意味の発展を表すならば、図5のようになるであろう。

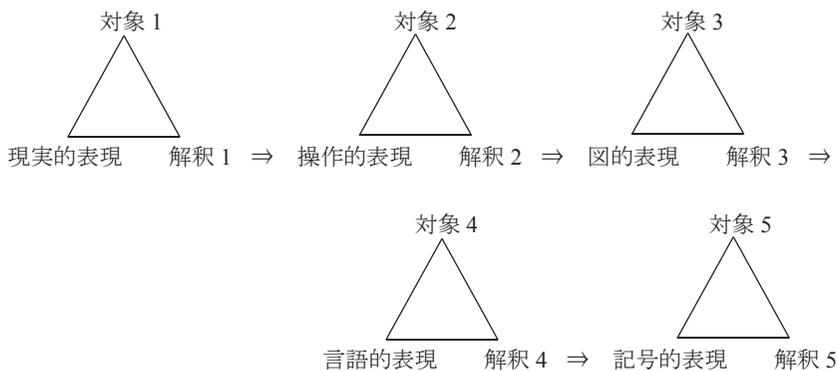


図5 理想的な意味の発展

このような連続的な意味の発展過程は、図3のものよりも大局的な表現活動を示しているといえよう。したがって、図3のような一つの表現様式内での表現活動を「局所的な表現活動」、図5のような複数の表現様式に渡る表現活動を「大局的な表現活動」と呼ぶことにする。

ここで、再び解釈について考えよう。先に、表現を「解釈する」という行為の中に、表現を解釈することやそのよさや美しさを味わうということも含めてとらえることとした。しかし、解釈することということばも若干不明確である。これを記号論的に考えるならば、例えばパースの解釈項という概念には、感覚や意志、理解、判断、論理的推論なども含まれる(和田, 2007)。つまり、「解釈する」という行為には、直観的なものから論理的なものまでの思考や判断することまで含まれるのである。したがって、思考力・表現力・判断力の育成が求められていることに鑑みると、解釈するという行為には、思考することはもちろん、判断することも含めて考えることは重要であるので、そのようにとらえることとする。

(4) 表現活動と説明する活動

さて、新しい学習指導要領では、算数的活動・数学的活動の中に、いわば「説明する活動」というものが重視されている。これは、方法としての表現に焦点を当てるものである。学習指導要

領解説を眺めてみれば、小学校低学年では表現すること、小学校中・高学年では表現したことを用いて考えたことを説明すること、中・高等学校では論理的に説明することが求められている（和田，2009）。記号論的視座からすると、説明する活動とは対象としての表現を明示しながら方法としての表現を用いる活動である。つまり、数学教育における表現活動では、対象としての表現を明示しながら方法としての表現を用いることが重要であり、口頭で説明するだけのような聴覚的な表現のみの活動は、数学教育における表現活動ではないということに注意する必要がある。

また、解釈する行為も考慮するのであれば、単に説明するだけでなく、説明を受ける側の態度や思考も重要である。例えば、他者の説明に対して論理的に考え、齟齬がある場合には反例を挙げるなどの態度が必要であるし、説明を受ける側は説明する人が説明しやすいような雰囲気を作ることも重要なことになるであろう。

5. おわりに

本稿は、数学教育における表現活動の意味を検討することを目的としていた。その結果、数学教育における表現には対象としての表現と方法としての表現とがあること、それらは主として視覚的な表現であり、聴覚的な表現は前者には含まれないが後者には含まれることを指摘した。また、表現活動には「表現する」行為と「解釈する」行為が含まれ、後者には思考や判断、よさ・美しさの感得も含まれること、また表現活動の過程には、一つの表現様式に対する構成、操作、解釈のサイクルから成る局所的な表現活動と、複数の表現様式に渡る連続的な意味の発展過程である大局的な表現活動とがあることを指摘した。さらに、説明する活動では、対象としての表現を明示しながら方法としての表現を用いることが必要であり、説明をする者だけでなく説明を受ける者に対する指導も重要であることを指摘した。

最後に、今後の課題について述べておきたい。数学教育における表現活動における解釈することについて、鑑賞することや判断することも含めて考えた。しかしながら、数学教育における鑑賞に関する研究は十分ではないのが現状である。数学のよさの感得などを重視した研究はあるけれども、数学に対する情意面の低さを考えるならば、この方向の研究をもっと充実させる必要があるだろう。また、従来、数学教育においては思考力・表現力の育成は重視されていたが、判断力の育成は重視されていなかった。数学的リテラシーの育成を重視するならば、数学を使って判断する力も必要となる。これも、今後の課題となるであろう。

付記

本稿は、2011年11月に行った下越数学教育研究会第17回算数・数学教育研修会での講演と、2012年6月に行った鹿児島県数学教育会第63回鹿児島県算数・数学教育研究会（南薩）大会での講演に基づいている。なお、本研究は科研費（課題番号24730744）の助成を受けている。

註及び引用・参考文献

- (※) 中原 (1995) は、広島グループの表記研究を、戸田清を中心とした第1期と平林一榮を中心とした第2期に大きく分け、これらの研究を受け継ぎ発展させたものであると明言している (pp.195-196)。
- 新井紀子 (2011), 「言語としての数学」, 『数理科学』, 49(5), 11-16.
- 国立教育政策研究所 (2004), 『生きるための知識と技能2 OECD 生徒の学習到達度調査 (PISA) 2003年調査国際結果報告書』, ぎょうせい.
- 国立教育政策研究所 (2005a), 「平成15年度 小・中学校教育課程実施状況調査」 (http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h15/index.htm), 平成17年7月8日.
- 国立教育政策研究所編 (2005b), 『TIMSS2003 算数・数学教育の国際比較 国際数学・理科教育動向調査の2003年調査報告書』, ぎょうせい.
- 中央教育審議会 (2008), 『幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について (答申)』 (http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1216828.htm).
- 中原忠男 (1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
- 平林一榮・磯部唯之 (1965), 「数学的表記過程の研究—Z.P. ディーネスの題材を用いて—」, 『日本数学教育会誌』, 47(10), 145-147.
- 三輪辰郎 (1996), 「文字式の指導序説」, 『筑波数学教育研究』, 15, 1-14.
- 文部科学省 (2008a), 『幼稚園教育要領解説』, フレーベル館.
- 文部科学省 (2008b), 『小学校学習指導要領解説算数編』, 東洋館.
- 文部科学省 (2008c), 『中学校学習指導要領解説数学編』, 教育出版.
- 文部科学省 (2009), 『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』, 実教出版.
- 和田信哉 (2007), 「図的表現の認識に関する記号論的考察—小数の乗法における数直線を事例として—」, 『新潟大学教育人間科学部紀要 自然科学編』, 10(1), 13-22.
- 和田信哉 (2008), 「小数の乗法の意味に関する記号論的考察」, 『数学教育学研究』, 14, 9-18.
- 和田信哉 (2009), 「表現からみた数学的活動」, 『日本数学教育学会誌』, 91(9), 15-20.