

# 図的表現と操作的表現の規約性に関する研究 —代数的推論の観点から—

和田 信 哉\*

(2013年10月22日 受理)

## A study of rules of illustrative and manipulative representation: From a viewpoint of algebraic reasoning

WADA Shinya

### 要約

本稿は、不明確な代数的推論をより明確にし、それを促進するための示唆を得ることを目的とした。その際、代数的推論をダイアグラムの推論 (diagrammatic reasoning) の観点から、特に図的表現と操作的表現の規約性について検討した。

その結果、次の諸点を明らかにした。(1) 代数的推論の暫定的な規定を次のように修正した：規約性を有する表現における数や演算の性質や関係などの関係性を見だし、それを演繹的に説明すること。(2) 規約性には構成規則と操作規則があるが、数の関係や演算にかかわる構成規則には操作規則が内在している。(3) したがって、図的表現や操作的表現に基づくものであっても、それらが数の関係や演算にかかわる構成規則を有していれば代数的推論となる。(4) 代数的推論を促進するための示唆として、表現の規約性を明確にすることなどが必要となること、漸進的なダイアグラム化 (progressive diagrammatization) の過程を経るようにすること、ダイアグラム (diagram) を単に抽象的概念を説明するものとみなさないようにすることが挙げられる。

**キーワード：**図的表現と操作的表現の規約性、代数的推論、ダイアグラムの推論 (diagrammatic reasoning)

---

\* 鹿児島大学教育学部 准教授

## 1. はじめに

本研究は、小学校算数と中学校数学の接続を数学教育研究の主要な課題（岩崎，2007）ととらえ、とりわけ算術から代数への移行過程について、算数からアプローチしようとするものである。

中等教育段階での代数学習の困難（例えば，Booth，1988；小山，1988など）から、算術から代数への移行に関する様々な取り組みがなされてきている（Carraher & Schliemann，2007を参照）。本研究では、その取り組みの一つである「初期の代数（Early Algebra）」に着目する。これは、算数において代数的推論を促進させることが代数学習につながるということ为前提にして研究が進められており（Carraher & Schliemann，2007）、このことは、わが国における文字式の学習で指摘されている重要な課題でもある（藤井，2010）。

以上のように、本研究は、算術と代数の接続という課題意識の下、初期の代数の立場から、代数的推論の観点で算数の教材を開発するとともに、その推論を促進する授業構成を提案しようとするものである。しかしながら、現在、代数的推論に関する統一された見解がないという状況にあるため、それを観点に授業改善を図るには、まずその推論を明確にする必要がある。そのため、和田（2012）では、第6学年の分数の乗法・除法の単元を対象とすることで、その授業において自然発生的に現れた代数的推論を同定するとともに、指導への示唆を導いた。また、和田（2013）では、その単元において現れた代数的推論を、複数時間に渡る、一連の学習活動の中に位置づけ、その機能について議論することで代数的推論をより明確にした。

しかしながら、代数的推論の規定はその授業に基づいたものであるがゆえにまだ暫定的なものであるし、それを促進するための示唆が十分に得られているとは言い難い。とりわけ、図的表現や操作的表現を用いた代数的推論（具体的に基づく代数的推論）については、議論が十分に尽くされているとは言い難い。

そこで、本稿では、代数的推論をより明確にし、それを促進するための示唆を得るために、それをダイアグラムの推論（diagrammatic reasoning）の観点から検討していくことを目的とする。ダイアグラムの推論は、近年、数学的思考が純粹に論理的な手段で説明されず、表象体系に深く依存しているという見解から、数学教育において重要な役割を果たすものとしてみなされている（Hanna, et al., 2010）。この推論は、代数的推論とも深く関連していると考えられるので、この観点から代数的推論を、特に具体的に基づく代数的推論を検討することによってそれをより明確にでき、その促進のための示唆をさらに得ることができると考える。

そのため、本稿では、まず本研究における代数的推論の暫定的な規定を、その枠組みとなっている記号論とともに述べていく。次に、ダイアグラムの推論について、ダイアグラム（diagram）のとらえ方もふまえた上で、代数的推論との関連について述べていく。そして、中学校と小学校の事例を用いて分析を行い、最後に、図的表現と操作的表現の規約性につい

て議論することで、代数的推論をより明らかにし、それを促進するための示唆を得たい。

## 2. 理論的背景

本研究では、代数記号や代数的内容を直接扱っていなくても、代数的推論を働かせる場面は小学校でも数多くあり、そのような場面で働くその推論を促進させていくことが代数学習につながっていくという、初期の代数 (Carragher & Schliemann, 2007) の立場に立っている。代数的推論に関しては、現在、統一された見解はない (Carragher & Schliemann, 2007, p.676)。そこで、和田 (2012, 2013) では、「一般性の認識」と「正当化」の二つの視点から、代数的推論の明確化を行った。そこで、まずはその枠組みとなっている記号論について概観しよう。

### (1) 記号論

本研究では、Peirceの記号論を数学教育的に解釈して枠組みとしている (和田, 2012)。記号論における「記号」とは、かかれたものという狭い意味ではなく、思考や活動をも含む広いものである。そしてPeirceの思想の特徴は、記号を含む現象を第一次性 (質, 可能性), 第二次性 (現存性), 第三次性 (法則性) にカテゴリー化しているところにある (CP2, 84-86)<sup>1)</sup>。そのため、記号も表意体 (記号そのもの), 対象 (記号と対象の関係), 解釈項 (記号と対象とを結びつける解釈) というように三項関係としてとらえられる。

さらに、それぞれにもカテゴリーをあてはめ、表意体は性質記号 (記号となりうる記号 [潜在的]), 単一記号 (実際に記号として働いている記号 [具体的]), 法則記号 (法則として働いている記号 [一般的]) に、対象は類似記号 (記号と対象が類似性に基づいて結びつけられている記号), 指標記号 (記号と対象が直接的指示や近接性に基づいて結びつけられている記号), 象徴記号 (記号と対象が規約的に結びつけられている記号) に、解釈項は名辞記号 (解釈の形式が名辞の記号), 命題記号 (解釈の形式が命題の記号), 論証 (解釈の形式が論証の記号) に分類される (CP2, 243-253)。

また、解釈者の置かれている状況によって記号の解釈は異なるものになると考えると、その解釈を検討することによって表意体と対象を相対的に同定することができる。つまり、解釈者の解釈によっては同一の記号であってもその対象などが異なることは多分にある。このように考え、記号の解釈項を除き、カテゴリーの優位性を考慮して、記号の意味の発展過程を示すものである数学教育における記号のクラスを、次のようにとらえている (和田, 2012)。

- ① 潜在的類似記号
- ② 具体的類似記号
- ③ 具体的指標記号

- ④ 一般的類似記号
- ⑤ 一般的指標記号
- ⑥ 一般的象徴記号

例えば、買い物の状況を設定したとすると、この状況は①になる。なぜならば、この状況はまだ記号にはなっていないけれども、これから記号になりうる潜在的なもので、その指示対象は買い物そのものであるから、それとの関係は類似的なものだからである。

そして、その買い物の状況において、38円の飴と27円のガムを買ったとする。それを実際の飴とガム、お金で表したのも記号となり、②になる。これは、はじめの状況を表す記号として働いており、その指示対象はそのものなので、関係は類似的なものである。

また、その買い物の値段をブロックに置き換え、それを操作して表すと③になる。なぜならば、それははじめの状況の値段を表す記号として働いており、その指示対象である合併（合わせる）との関係が近接的なものだからである。

そのブロックで表した記号を、「合わせる」ということを矢印などを用いて明示的に図で表すことができる。そのような図は、加法という抽象的な数学的对象を表すものとして働いており、その指示対象との関係が類似的なものであるため④になる。

⑤は、そのような関係をことばで表すものがそれにあたり、抽象的な数学的对象を表す記号として働いており、その指示対象との関係が近接的なものである。

最後の⑥は、 $38+27=65$ のような式表現のことであり、これももちろん抽象的な数学的对象を表す記号として働いており、その指示対象との関係が規約的なものである。

このように記号のクラスをとらえると、記号のクラスが④になったとき、記号そのものが一般性を帯びる、つまり一般的・抽象的な対象を指示することになるので、一般性を認識できたこととらえることができよう。

## (2) 代数的推論

上述のようなことから、和田(2012, 2013)では、記号論的な枠組みを用い、「一般性の認識」と「正当化」を一般的な分析の視点として代数的推論をとらえた。なぜなら、一般性の認識については、多くの先行研究に共通しているからである(例えば、Blanton & Kaput, 2005; Mason, 1996など)。また、「推論」というからには、その理由づけの過程が重視されるべきであり、そのため正当化の観点を重視する先行研究もあるからである(例えば、Lannin, 2005; Smith, 2007など)。

一般性の認識については、本来ならば、文字式による表現までの一般化として考えるべきであろうが、本研究では小学校段階ということを考慮し、そこまでの表現は求めていない。ただし、対象の一般性を認識して発達段階に応じた表現をする必要はあるという立場(Blanton & Kaput, 2005)から、子どもはその一般性を何らかの表現で説明する必要がある

と考える。また、正当化については、算数の授業が教室で行われる社会的営みということに鑑みれば、個人の認知活動に焦点を当てるのではなく、教室での相互作用に焦点を当てなければならない(熊谷, 1998)。したがって、この点からも、子どもは認識した一般性を説明する必要が、とりわけ演繹的に説明する必要があると考える。

これらの視点から、和田(2012, 2013)では、分数の乗法・除法の授業分析を通して、分数の乗法・除法に関する代数的推論を次のようにとらえている：「数や演算の性質や関係などの関係性を見だし、それを演繹的に説明すること」。

「代数的」推論であるから、本来は、数ではなく演算について考えるべきものであろう。しかし、分数の性質など(例えば、 $3/4=3\div 4$ )に着目することも必要となるので、数の性質や関係も含めている。また、「関係性」とは、対象としている状況などにおける代数的な関係のことである。例えば、問題状況の乗法構造や、分数の除法で逆数をかける意味、等号の意味(同値関係)などである。また、「演繹的な説明」とは、通常であれば、一般的な事例を前提として、三段論法などの妥当な推論規則に従って結論を導く、結論の一般性を保証するものである。例えば、分数の乗法・除法の計算方法を正当化する際に、それらの演算の性質に基づいて説明するものが挙げられる。しかしそれだけでなく、図的表現や操作的表現のような特殊な事例を前提としても、推論規則が妥当であれば演繹的な説明に含めてとらえている。例えば、計算方法を面積図に基づいて説明するものや、乗法や除法の立式の際に数直線図<sup>2)</sup>に基づいて説明するものも含めてとらえる。したがって、代数的推論は抽象に基づくもの(数や演算の性質を用いた代数的推論)と具体に基づくもの(図的表現や操作的表現を用いた代数的推論)とに大別できる。

しかしながら、代数的推論のこの規定はあくまでも暫定的なものであるし、それを促進させるための示唆を得るにはさらなる検討が必要であると考ええる。とりわけ、具体に基づく代数的推論についてのさらなる検討は、必須であると考ええる。

### (3) 「代数的」な表現

先に述べたように、本来ならば文字式による表現までの一般化を代数的推論と呼ぶべきであるかもしれない。しかしながら、そもそも代数的推論という概念を用いる理由は、文字式を学習する以前の小学校段階を対象としているからであり、文字式による表現に限定すること自体が矛盾を孕むこととなろう。それでは、どのような表現が代数的推論に必要であろうか。

数学教育における表現について、中原(1995)は、個々の具体的な表し方である表現方法を類型化したものを表現様式と呼び、次の5つに分類している(pp.199-200)。

現実的表現：実世界の状況、実物による表現。具体物や実物による実験などはここに含まれる。

操作的表現：具体的な操作的活動による表現。人為的加工，モデル化が行われている具  
体物，教具等に動的操作を施すことによる表現。

図的表現：絵，図，グラフ等による表現。

言語的表現：日本では日本語，米国・英国等では英語など，各国の日常言語を用いた表  
現。またはその省略的表現。

記号的表現：数字，文字，演算記号，関係記号など数学的記号を用いた表現。

これらの表現様式の内，記号的表現を用いるものは抽象に基づく代数的推論といっても差  
し支えないであろう。問題となるのは，図的表現や操作的表現を用いる場合である。和田  
(2012, 2013)では，特に図的表現については，それを用いる際に代数的推論が働いている  
場合とそうでない場合とがみられた。それは，前述の記号論的枠組みを用いて，相対的に一  
般性を認識できたかどうかで区別したものであったが，常に相対的に区別されるものであ  
ろうか。ある程度相対的ではない，具体に基づく代数的推論と判断される基準があるのでは  
ないであろうか。

例えば，代数の導入に対するアプローチの視座として，一般化，関数，問題解決，モデル  
化が挙げられている (Bednarz et al., 1996)。本研究は，一般化の視座からアプローチして  
いるものととらえることができるが，他の視座からの補完も必要かもしれない。また，代数  
的概念に対して，「手続き」と「概念」との二面性に関する指摘が多くなされてもいる (例  
えば，Gray & Tall, 1993 ; Hiebert & Lefevre, 1986 ; Sfard, 1991など)。このような特徴  
も考慮すべきであろう。

しかし本稿では，Peirceの概念であるダイアグラムの推論に特に着目したい。なぜならば，  
本研究の枠組みとなっている記号論は彼のものに依拠しているし，後で述べるように，表現  
の規約性に着目するこの概念は，どのような図的表現や操作的表現を用いることが代数的推  
論となりうるかという基準をより明確にすると考えるからである。

### 3. ダイアグラムの推論

ダイアグラムの推論とは，Peirceの概念であり，彼は，数学的推論はすべてダイアグラムの  
推論であると言い切っている (Otte, 2006)。それでは，この推論を検討するにあたり，ま  
ずはその前提となっているダイアグラムのとらえ方をみていこう。

#### (1) ダイアグラム

ダイアグラム (diagram) とは，通常，「図式」と訳されることが多く，それは，「関係を  
表す図」を意味する。しかしながら，Peirceの考えるダイアグラムとはそれだけにとどまるも  
のではなく，代数記号を用いた表現までもダイアグラムと考えており (CP2, 279)，次のよ

うにとらえている：「有力な関係の類似記号であり、慣習によってそのようなものとして用いられる表意体である。指標記号も、多少使用される。それは、完全に一貫した表象体系に基づいて実行されなければならない、単純にかつ容易に理解可能な基本的アイデアに基づいている」（CP4, 418）。

この引用のように、「一貫した表象体系」が重要となるため、代数記号を用いた表現もダイアグラムとみなされるのである。例えば、Dörfler (2007) では、行列がその例として挙げられている。このような、通常の意味とは異なるダイアグラムの特徴としてDörfler (2001) が挙げたものを、Rivera (2011) は次のようにまとめている (p.228)。

- ・ 構造的、関係的である；ダイアグラムにおける対象は、ある方法で配列されており、部分あるいは構成要素が関係づけられている。それらは関係を表しているので、図的というよりも関係的なものである。
- ・ 内的意味をもつ；それらを実行、変換する方法に関する規則が存在する。
- ・ 外的（参照的）意味をもつ；それらを数学内外で使用、解釈することを許す規則が存在する。
- ・ 一般的である；それらは、同じ類の個々の例を包含する一種の視覚的一般性を伝達する。
- ・ 知覚的、物質的である；関連する操作は、知覚的、物質的文脈において実行される。

これらの点の内、特に二点目の内的意味については、上述のPeirceのいう「一貫した表象体系」のことであり、このような操作に関する規則を有するがゆえに、代数記号を用いた表現もダイアグラムとなるのである。また、一点目の「ある方法で配列」されていることも、一貫した表象体系の一部であるといえ、構成に関する規則も重要であるといえよう。例えば、代数記号を含む記号的表現では、その構成の規約性も特徴の一つとして挙げられるため（中原, 1995, p.256）、ダイアグラムは「操作規則」だけでなく「構成規則」も有するものといえよう。

また、ダイアグラムは、そのような規約性（構成規則と操作規則）を有するものであるが、知覚的な特徴を有するため、視覚的な表現である必要もある。つまり、ダイアグラムは、視覚的な配列によって関係がみえるような表現であるため、類似記号とみなされる。さらに、一般的な記号であるという条件も備えているため、前述の記号のクラスでは、ダイアグラムは④の一般的類似記号に属することになる<sup>3)</sup>。

## （2）ダイアグラムの推論

上述のようなダイアグラムを用いて推論することを、Peirceはダイアグラムの推論と呼んでいる。Hoffmann (2005) は、この推論を次のような三段階からなるものとしてとらえている。

1. ダイアグラムの構成
2. ダイアグラムに対する実験
3. 実験結果の観察

はじめに、ダイアグラムを構成する必要がある。もちろん、その際には、前述のように構成規則に従ってダイアグラムは構成される。そしてそのようにして構成されたダイアグラムに対して、何らかの操作（実験）を行う。そしてこの際も、操作規則に従って操作が行われる。最後に、その操作の結果を観察し、関係性を見いだすことでこの推論が行われる。

Hoffmann (2005) は、この推論によって見いだされる関係性について、すぐに解釈できる場合とそうでない場合があり、後者の場合が真に創造的なものであることを指摘している。また、創造的な場合、ダイアグラムの操作か構成されたダイアグラムそのものを疑い、新たな観点から見直したり、新たな表現を加えたりする必要もあることも指摘している。

特に、新しい関係性が見いだされた後に、実在的抽象 (hypostatic abstraction) が起こることが指摘されている。実在的抽象とは、事物ではないものを事物として扱うようにする抽象化の過程であり、ラテン語の表記では具象化 (reification) に対応するため (Hoffmann, 2005, p.49), 数学教育でも重要であることがわらう (Sfard, 1991を参照)。したがって、ダイアグラムの推論は、具象化につながる推論である。

また、Rivera (2011) は、数学的認知活動が、本質的に視覚的思考であることをダイアグラムの推論の観点も取り入れて検討しており、次のように述べている。

ダイアグラムの推論を用いることで、その焦点は、規則性と不変な関係性を見だし、構成し、確立することに転換し、それらは、結局はそれ自体他の形式のダイアグラムである概念や定理の姿で現れる (p.229)。

このような一連の過程を、漸進的なダイアグラム化 (progressive diagrammatization) と呼び、やはり具象化につながることを指摘している。つまり、ダイアグラムの構成から新たなダイアグラムの構成までの一連の過程が漸進的なダイアグラム化であり、新しい関係性が見いだされるとき、その最終段階では具象化が生じるということである。

### (3) 代数的推論との関連

さて、上述のようなダイアグラムの推論と代数的推論との関係について考えていこう。上で指摘したように、ダイアグラムは記号のクラス④一般的類似記号と考えられ、代数的推論も、④の場面の推論として明確化を行っている。そして、両者とも、関係性を見いだす必要があることも共通している。

また、これまでの言語的に考えるタイプと視覚的に考えるタイプという思考スタイルの二



分法に対し（例えば，スケンプ，1973），視覚的に考えるタイプはさらに，対象の性質を視覚化するタイプと対象の関係を視覚化するタイプに分けることができるという。しかも，これら三つのタイプの内，対象の関係を視覚化するタイプだけが代数的推論と有意に関係していることが示されている（Chrysostomou et al., 2013）。つまり，対象の関係を視覚化するダイアグラムの推論を行うことと代数的推論を行うことは密接な関係にあるのである。

したがって，代数的推論はダイアグラムの推論とみなしてもよいであろう。ただし，ダイアグラムの推論は代数的文脈に限定されないものであるから，すべてのダイアグラムの推論が代数的推論であるとはいえない。そして，代数的推論をダイアグラムの推論とみなすならば，その際に用いられる表現の規約性が問題になることがわらう。つまり，具体的に基づく代数的推論をより明確にしようとするならば，図的表現と操作的表現の規約性について検討することが必要であるということである。そこで，次に事例を挙げながらそのことについて検討していこう。

#### 4. 事例的分析

ここでは，関係性をすぐに見いだすことができなかつたが代数的推論が働いたとみることができる，中学校第3学年の因数分解の授業と小学校第6学年の分数の除法の授業を事例として取り上げて，ダイアグラムの推論の観点から分析していく。

##### (1) 因数分解

一つ目の事例は，中学校第3学年の因数分解の授業であり，共通因数を取り出す因数分解の学習後， $x^2 + 7x + 10$ を学習する場面である（山本，2010）。

この時間では，「 $x^2 + 7x + 10$ の因数分解の「やり方」を考えよう」という課題提示の後，図1のダイアグラムが生徒との対話により構成された。

$$\begin{array}{ccc}
 & x^2 + 7x + 10 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 x \times x & 7 \times x & 1 \times 10 \\
 & & 2 \times 5
 \end{array}$$

図1 因数分解の授業のダイアグラム①

生徒たちは，構成規則に従い構成されたダイアグラムに対して，前時の共通因数を取り出すときと同じ操作規則を適用した。しかし，共通因数を取り出すことができないことが確認された。また，一部の生徒から， $(x+2)(x+5)$ という発言があったが，大半の生徒は逆算すればそうなることは認めたものの，方法としては納得しなかつた。つまり，ダイアグラムに対する実験結果の観察で，関係性を見いだすことができなかった。

そこで，授業者は， $x^2$ の正方形， $x$ の長方形，1の正方形のタイル図の入った封筒を配布し，

「因数分解がこうなる理由を考えよう」と指示をした。約5名の生徒はタイル図を使わず、図1のダイアグラムの操作を続ける内に、その操作を図2のように修正した。

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

$$x \times x \quad 1 + 6 \quad 1 \times 10$$

$$2 + 5 \quad 2 \times 5$$

$$3 + 4$$

図2 因数分解の授業のダイアグラム②

図2のように、関係性を見いだすことができるように、それまでの共通因数を取り出すための乗法的分解という操作規則を、同様に文字式の操作規則としては既に知っている加法的分解という新たな観点で見直すことで、「たして7、かけて10になる2数」を見いだすことができた。しかしこれは、「手続き」を見いだしていたがその意味にあたる「概念」を見いだしたわけではなかった。

他方、ほとんどの生徒はタイル図を使い、一部の生徒が図3のように考え、黒板に図的表現として示された。

$x^2$	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$
$x$	1	1	1	1	1
$x$	1	1	1	1	1

図3 因数分解の授業のダイアグラム③

前時に $x^2 + 3x$ の因数分解をタイル図で考察する活動を行っていたので、 $x^2$ の正方形1枚、 $x$ の長方形7枚、1の正方形10枚が必要であることは容易であった。つまり、そのダイアグラムの構成要素は何であるか、また長方形に配列するという目的も把握できていた。そして、それらを長方形に配列しようとする際に、前時の学習から横に並べる生徒が多かったが、それではうまくいかないことに気づき、試行錯誤により図3のダイアグラムを見いだしていた。

長方形に配列する操作ができた生徒は、その長方形を観察し、縦が $x+2$ 、横が $x+5$ であることを読み取っていた。そして、図2と図3のダイアグラムが関連づけられ、新たな因数分解の方法が正当化された。つまり、図3は図2の「概念」にあたるものとなっており、それらが結びつくことによって「手続き」と「概念」が一体となり正当化がなされたのである。

このように、構成規則は明確であるが操作規則が適用できないダイアグラムの場合、操作規則を新たな観点から見直すことで関係性を見いだすことができる。この事例からわかるように、操作規則は構成規則と密接にかかわっている。より詳細に言えば、ダイアグラムの演

算にかかわる構成規則に操作規則が内在しているといった方がよいかもしれない。なぜならば、例えば「 $x$ が7つあることを $7x$ と表す」という構成規則の中に、既に「 $7x$ は $2x$ と $5x$ に分解できる」という操作が暗黙的に備わっているからである。

また、記号的表現によるダイアグラムと図的表現によるダイアグラムでは、図的表現の方が構成と操作の自由度が高いということもわかる。

## (2) 分数の除法

二つ目の事例は、小学校第6学年の分数の除法の授業であり、逆数の乗法となることが仮説として提案された後、そうなることを「計算のきまり」で説明した児童がいたが、それでは全員が納得できず、面積図で説明しようとする場面である(和田, 2012)。

この授業では、唯一はじめから面積図を使って考えていた児童が、「 $2/5 \div 3/4$ 」を「 $2/5$ の $3/4$ 」と解釈し、図4のような面積図を発表した。

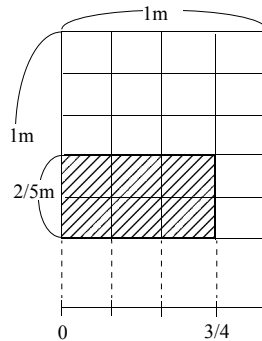


図4 分数の除法の授業の面積図①

また、これとあわせ、仮説である「 $2/5 \div 3/4 = 2/5 \times 4/3$ 」の式の手続きの意味から「 $2/5 \times 4/3$ 」を表そうとする図5のような面積図も提示した。

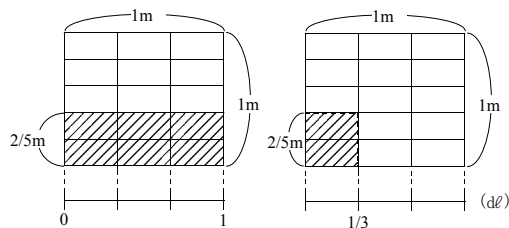


図5 分数の除法の授業の面積図②

しかし、他の児童はもちろん発表した児童本人も、なぜ逆数の乗法になるのか、ということについては説明ができずに納得できなかった。

そこで、教師は図4の「 $1m$ 」と「 $1dℓ$ 」の対応のズレに気づかせるために、図4の四角形の横の長さが「 $1m$ 」のところはどこになるのかを問いかけた。それによって、児童は「 $1m$ 」に

あたる部分が「 $3/4d\ell$ 」に対応する部分であることに気づき、問題場面の構造にあてはまるものとなるように、面積図を図6のようなダイアグラムとしての面積図に変容させた。

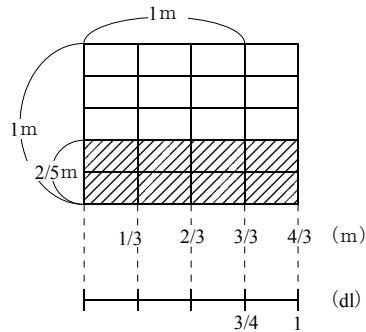


図6 分数の除法の授業のダイアグラム

そして、この面積図の中の「1m」の長さが縦に何等分されているかを教師が問い、面積を求めるといった目的から逆数の乗法になるという関係性を読み取り、分数の除法の計算方法を一般化した。つまり、図的表現は具体と抽象の架橋となる表現であるが、抽象的な計算方法を指示するだけでなく、具体的な問題場面も指示するものになることで、理解されたのである。

このように、児童たちは、因数分解の事例とは異なり、数の対応関係にかかわる構成規則が明確ではなかったものを明確にしていくことで、その操作規則も明らかになり、そこから関係性を見いだすことができた。つまり、ダイアグラムとなっていなかったものをその規約性を明確にしていくことでダイアグラムへと変容させ、そこから関係性を見いだしていったのである。

また、はじめの面積図は、抽象的な計算方法が先にあり、それを表そうとしたものであったが、問題場面から出発した数の対応関係にかかわる構成規則の確認によって代数的推論が促進され、面積という観点から関係性を見いだすことができた。小学校においては、具体から抽象へと進むようなモデル化の過程を経ることが多く、その際、モデルとしての表現は具体のモデルでもあり数学的対象を表すためのモデルでもあるから (Gravemeijer & Stephan, 2002), その両者を参照できるような状態であることが望まれるといえよう。

## 5. 議論

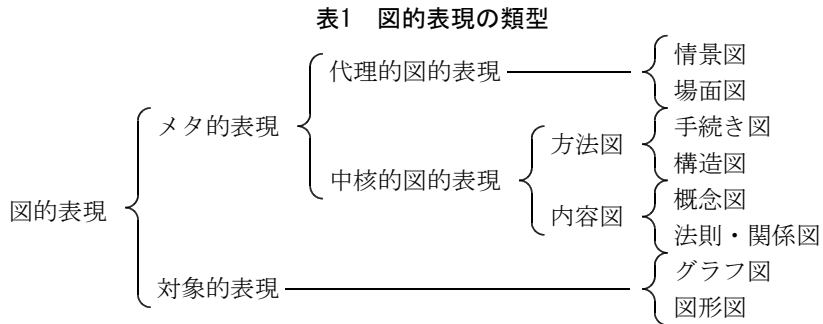
上述の事例的分析をふまえ、代数的推論をダイアグラムの推論とみなした上で、図的表現と操作的表現の規約性、そして代数的推論の規定とそれを促進するための示唆について議論していく。

### (1) 図的表現と操作的表現の規約性

ダイアグラムの特徴として挙げられる構成規則と操作規則は、代数的推論が働いた場面にも同様にみることができた。言い換えれば、これらの規約性を有する表現を用いることが、代数的推論には必要であるということである。さらにいえば、そのような規約性の中で観察されるべき関係性が存在しているのであるから、その構造は、三段論法的な形式とみることができる。つまり、三段論法の大前提が規約性、小前提がその規約性の下で現れる関係性にあたるので、その推論は必然的に演繹的推論になるといえよう。

このような規約性を有する表現がダイアグラムとみなすことができるのであるが、数学教育においてはどのような表現がこれにあたるであろうか。特に、代数的推論の暫定的な規定から、中原（1995）の挙げる表現様式の中でも記号的表現と図的表現、操作的表現を検討する必要がある。記号的表現は、先に示したように規約性を有しているので、他の二つをここで検討しよう。

図的表現に関しては、平林（1987）が指摘するように、本来は無規約的なものである（pp.393-395）。無規約的なものであるからこそ、自由にかくことができ、多様な表現が可能となり、非常に便利な表現である（中原，1995，p.241）。しかしながら、その多様性のため、図的表現には様々な類型や種類がある。中原（1995）は、図的表現の類型を次のように示している（p.225）。



対象的表現であるグラフ図と図形図は構成規則が存在するので（中原，1995，p.234），ダイアグラムといえるであろう。他方，メタ的表現はどうであろうか。代理的図的表現（情景図と場面図）は、絵的な表現であるから、規約性は存在しない。それでは、中核的図的表現についてはどうであろうか。内容図（概念図と法則・関係図）は数学的内容を表すものであるから、構成規則はあるものと考えられる。例えば、図7の表現は1/3を表すものとは考えられないであろう。それは、われわれが分数の構造にかかわる構成規則を共有しているからである。



図7 1/2の概念図

しかしながら、図7の表現は構成規則を有しているが、はたして操作規則を有しているといえるであろうか。先の二つの事例では、演算にかかわる構成規則と数の対応関係にかかわる構成規則を有していれば、操作規則がそれに内在されていることを指摘した。それらの場合と図7とは何が違うかという、何を基盤とした構成規則であるかということである。

例えば、小学校第2学年の筆算において、10進法に基づいたブロック図による説明がよくみられる。これには、整数の構造にかかわる構成規則があるけれども、その操作規則、例えば加法を示すものはない。ただブロックが上下に置かれているだけなので、ある特定の操作を指示するものではないのである。これに対し、逆思考の問題でよく使用されるテープ図は、演算にかかわる構成規則で成り立っているものなので、その関係性から操作規則を導くことができる。

操作的表現でも同様なことがいえる。例えば、佐々(2012)では、操作的表現による演繹的説明である操作的証明の調査研究を行っており、その構成に関しては、整数の構造に基づいたものであるため、小学校第5学年の児童にも理解できるものであった。これに対し、その操作については、操作に関する準備的指導が必要であるという結論が得られている。つまり、数の構造にかかわる構成規則がその表現にあったとしても、それから操作規則は導かれないということである。これに対し、例えばキズネールの棒による操作では、演算にかかわる構成規則を有しているため、加法や減法のような操作規則を有しているといえる。

以上のように、構成規則に関しては、数の構造にかわるものには操作規則が内在せず、数の関係や演算にかかわるものには操作規則が内在しているといえよう。したがって、前者は、むしろ操作に関して自由度が高いため、種々の操作から数学的なものを見だし、それを抽象化・一般化することが重要であり、後者は、それに内在する操作規則に従うことで代数的推論が働くことになる。

次に、表1の方法図について考えてみよう。手続き図については、例えば、手続き図である図4や図5は、「 $2/5 \times 4/3$ 」という操作(手続き)を表そうとするものであったが、なぜそのような操作が成り立つのか(概念)を示すものではない。つまり、手続きそのものではなく、その意味にあたる概念が見いだされる必要があるということである。これに対し、構造図は、数学的構造を示すものであるから、概念が見いだされるものである。

このように、代数的概念の二面性という観点から、構成規則に関して手続きだけでなく概念が見いだされるものである必要があることが指摘される。つまり、手続きに数学的な意味を与えると概念になり、それが操作規則を導くことになるということである。注意しなければならないことは、手続き図だからといってその図の中に概念が見いだされないとはいえないということである。

以上のように、図的表現と操作的表現は、数の関係や演算にかかわる構成規則を有していれば、それに操作規則が内在しているので、ダイアグラムとみなすことができる。また、数の構造にかかわる構成規則を有している場合は、操作規則を内在しているとはいえないの

で、可能な操作の内から数学的なものを見いだしていく必要がある。そういう意味では、見いだされた数学的操作を他の図的表現に表し、さらにそれに規約性を与えていくことでダイアグラムと変容するものであり、その前段階として位置づけられるもので、広義な意味ではダイアグラムと呼べるものである。また、代数的概念の二面性の観点から、概念が見いだされる必要があることも指摘したこともあわせると、構成規則をとらえるための枠組みは、表2のようになる。

表2 構成規則をとらえる枠組み

対象	基盤	数の構造	数の関係・演算
手続き		例：図 4, 5	例：図 1, 2
概念		例：図 7	例：図 3, 6

表2の左の列（数の構造にかかわる構成規則）は、広義の意味ではダイアグラムの範疇であるが、本質的には、右の列（数の関係や演算にかかわる構成規則）がダイアグラムに必要な構成規則となる。また、代数的概念の二面性から、手続きだけでなく概念も見いだせるような構成規則が望ましいので、右下に位置するセルが、ダイアグラムに必要な、より本質的な構成規則となるであろう。

## （2）代数的推論の規定とその促進

上述のように規約性をとらえると、暫定的な規定を以下のように修正できる。

規約性を有する表現における数や演算の性質や関係などの関係性を見だし、それを演繹的に説明すること

規約性という観点から、代数的推論の対象となる表現は、記号的表現と一部の図的表現及び操作的表現に限られることになる。つまり、表2の枠組みにおける構成規則に、特に数の関係や演算にかかわる構成規則に基づくものが代数的推論となる。ただし、規約性を有していたとしても、それらの表現ではその自由度に差があるため、図的表現や操作的表現を用いる際には注意を必要とする。

また、平林と磯部（1965）は、数学を創り出していく過程を数学的表記過程とみなし、その過程では構成規則を創り出すことが挙げられている。したがって、代数的推論に限らず、数学教育における推論はそれに依存するものとなるとも考えられる。代数的推論に限ってみれば、Kaput（2007）は代数的推論の核心として、「一般化の体系的記号化」と「統語論的に導かれる推論と活動」の二点を挙げている。上記の修正された規定は、これらの核心にも整合しているといえよう。

上述のように、代数的推論を促進するためには、まず規約性を有する表現を用いることが必要となる。そして、そのような表現から関係性を見いだすことができない場合は、規約性

が明確でない、あるいは意識されていない、共有されていない、慣習的に用いている規約性が通用しない、などがその理由として考えられる。したがって、そのような場合、それらの規約性を明確にする、意識する、共有する、他の規約性を想起して適用する、などの配慮が必要であろう。その際は、因数分解の事例のように、新たな観点（例えば、加法的分解）が必要となる。

また、分数の除法の事例のように、ダイアグラムの推論は、ダイアグラムでない表現がその規約性を明確にすることでダイアグラムへと変容し、その結果関係性を見いだすことができ、その関係性が新たな表現で表されるという過程がみられた。これは漸進的なダイアグラム化の過程であり、前述の記号のクラスで考えるならば、この過程は③具体的指標記号（例えば、図4と5）から④一般的類似記号（図6）、そして⑤一般的指標記号（ $b/a \div d/c = b/a \times c/d$ ）へと進展したとみることができよう。

つまり、③から④への進展は、規約性の明確化によってなされた。平林（1987）は、数学的表記に関して、規約の意識化によって対象言語となることを指摘しているが（p.394）、まさにそのような規約性の明確化によってダイアグラムへと変容するのである。

そして、ダイアグラムの身分が保障された表現には、関係性が内在しているので、新しいそれを見いだすことができれば、その関係性を他の表現で表すことによって具象化が生じ、④から⑤へと進展することになる。

つまり、漸進的なダイアグラム化の過程の最終段階で具象化が生じることになる。言い換えれば、ある表現の規約性を明確化してダイアグラムの身分を保障する過程を前提として、具象化は生じる。したがって、漸進的なダイアグラム化に基づいた授業展開は、代数的推論はもちろん具象化を生じさせることになる。ただし、Hoffmann（2005）が指摘しているように、新たな観点からの見直しや新たな表現の付加が鍵となろう。

また、分数の除法の事例では、モデル化の観点から、抽象的な概念をダイアグラムとして表現するのではなく、具体からの漸進的なダイアグラム化が重要であった。つまり、分数の除法の式そのものもダイアグラムであるが、児童たちにとってそれは身近な具体的なものではなかったので、その規約性から関係性を見いだすことが困難であったと考えられる。したがって、ダイアグラムを単なる数学的概念のためのモデルとみなすことは避けなければならない、それは具体のモデルでもあるという認識が、特に小学校の教師には必要となる。

例えば、図的表現が立式の手段として用いられるが、それをダイアグラムの観点でみるならば、単なる手段として用いることは避けるべきである。その図的表現の中に数学的な関係性を十分に見いだしてから、それを記号的表現に表していくことが必要なのである。

## 6. おわりに

本稿は、代数的推論をより明確にし、それを促進するための示唆を得るために、それをダイアグラムの推論の観点から検討していくことを目的としていた。その結果、代数的推論の



暫定的な規定を次のように修正した。

規約性を有する表現における数や演算の性質や関係などの関係性を見だし、それを演繹的に説明すること

この規定における規約性とは、表2の枠組みでとらえられる構成規則及びそれに内在されている操作規則のことを指している。したがって、そのような規約性を有していれば、記号的表現に基づかなくても代数的推論となることを指摘した。また、代数的推論を促進するための示唆として、表現の規約性を明確にすることなどが必要となること、漸進的なダイアグラム化の過程を経るようにすること、ダイアグラムを単に抽象的概念を説明するものとみなさないようにすることも指摘した。

今後の課題としては、これらの代数的推論の暫定的な規定やそれを促進するための示唆をふまえ、算数の教材を開発し、それを実践的に検討するとともに、代数的推論をさらに明確にしていくことが挙げられる。また、初期の代数への他の視座からのアプローチ（関数や問題解決など）による検討も必要であろう。さらに、大きな課題であるが、ダイアグラムについての認識から、数学教育における記号論的認識論を整備しなければいけないと考えている。

なお、本研究は科研費（課題番号24730744）の助成を受けている。

## 註及び引用・参考文献

- 1) 慣例にしたがい、Peirceの論文集（Peirce, 1931-35, 1958）からの引用・参考の場合には、（CP巻数, パラグラフ数）と表記する。
  - 2) ここでいう数直線図ということばは、二量を数直線で表したものと一方の量をテープ図で表したものと、一本の数直線の上下に二量を表したものを合わせて使用している。
  - 3) これらのような特徴から、diagramは「規約的視覚記号」あるいは「規約的類似記号」とでも訳すのが適当かもしれない。
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.)(1996). *Approaches to algebra*. Kluwer.
- Blanton, M. L. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 412-446.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In Coxford, A. F. et al. (Eds.), *The idea of algebra, K-12*, 20-32. NCTM, INC.
- Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 669-705. Information Age Publishing.
- Chrysostomou, M., Pitta-Pantazi, D., Tsingi, C., Cleanthous, E. & Christou, C. (2013). Examining number sense and algebraic reasoning through cognitive styles. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 205-223.
- Dörfler, W. (2001). Instances of diagrammatic reasoning. Paper presented to the discussion group on semiotic and mathematics education at the 25th PME conference, University of Utrecht, Netherlands.
- Dörfler, W. (2007). Matrices as Peircean diagrams: A hypothetical learning trajectory. *CERME*, 5, 852-861.
- Gravemeijer, K. & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In Gravemeijer, K. et al. (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, 145-169. Kluwer.
- Gray, E. & Tall, D. (1993). Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.
- Hanna, G., Jahnke, H. N. & Pulte, H. (2010). Introduction. In Hanna, G. et al. (Eds.), *Explanation and proof in mathematics*, 1-13. Springer.

- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 1-27. Lawrence Erlbaum Associates.
- Hoffmann, M. H. G. (2005). Sign as means for discoveries: Peirce and his concepts of "diagrammatic reasoning," "theorematic deduction," "hypostatic abstraction," and "theoric transformation". In Hoffmann, M. H. G. et al. (Eds.), *Activity and sign*, 45-56. Springer.
- Kaput, J. J. (2007). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J. et al. (Eds.), *Algebra in the early grades*, 5-17. Routledge.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification. *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (3), 231-258.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In Bednarz, N. et al. (Eds.), *Approaches to algebra*, 65-86. Kluwer.
- Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 11-38.
- Peirce, C. S. (1931-35, 1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Harvard University Press.
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. Springer.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Smith, E. (2007). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In Kaput, J. J. et al. (Eds.), *Algebra in the early grades*, 133-160. Routledge.
- 岩崎秀樹 (2007), 『数学教育学の成立と展望』, ミネルヴァ書房.
- 熊谷光一 (1998), 「小学校5年生の算数の授業における正当化に関する研究」, 『数学教育学論究』, 70, 3-38.
- 小山正孝 (1988), 「算術から代数への移行に関する認識論的考察」, 『第21回数学教育論文発表会論文集』, 52-57.
- 佐々祐之 (2012), 「数学教育における「操作的証明 (Operative proof)」に関する研究 (Ⅱ) —おはじきと位取り表の操作に関するインタビュー調査を通して—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18 (2), 77-89.
- スケンプ, R. R. (1973), 『数学学習の心理学』 (藤永保・銀林浩訳), 新曜社.
- 中原忠男 (1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
- 平林一榮 (1987), 『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館.
- 平林一榮・磯部唯之 (1965), 「数学的表記過程の研究—Z.P.ディーンズの題材を用いて—」, 『日本数学教育会誌』, 47(10), 145-147.
- 藤井齊亮 (2010), 「文字式」, 日本数学教育学会編, 『数学教育学研究ハンドブック』, 83-94, 東洋館.
- 山本貴之 (2010), 「図式的推論を生かした数学の授業に関する研究」, 新潟大学教育学部数学教室『数学教育研究』, 45 (1), 48-68.
- 和田信哉 (2012), 「分数の乗法・除法に関する代数的推論の明確化」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18 (1), 31-41.
- 和田信哉 (2013), 「分数の乗法・除法に関する代数的推論の機能に関する研究」, 『日本数学教育学会誌』, 95 (2), 2-10.