

学位論文の要旨

氏名

Jenizon

学位論文題目

共形的フィンスラー幾何学における幾つかの話題について

本学位論文は、Riemann幾何学におけるWeyl接続の自然な拡張であるFinsler-Weyl接続とその共形的Finsler幾何学への応用について得られた結果をまとめたものである。最終章でFinsler多様体と、特にRanders計量をもつFinsler多様体の共形的平坦性の特徴付けを与えた。

第1章は準備のための章である。まず多様体の接バンドルのEhresmann接続と非線形接続について解説し、さらに通常は共変微分で定義される接続がLie微分を用いて定義されることを示した。また、最後の節で、この定義を用いてRiemann幾何学におけるWeyl接続とLyra接続について解説した。

第2章では、この学位論文の主たる対象であるMinkowski計量やFinsler計量を定義し、特にその特殊な例としてRiemann計量が得られること、またRiemann計量の自然な拡張として得られるRanders計量について解説した。

第3章は、第1章の議論をもとに、Finsler多様体のBerwald接続を定義し直した。この章ではまずLandsberg空間の特徴付けを考察している。特にBerwald空間ではBerwald接続が底空間のあるRiemann計量のLevi-Civita接続から誘導されるというZ.Szaboの定理を見直し、そのようなRiemann計量は[Ma-Ra-Tr-Ze]により導入されたいわゆる平均化されたRiemann計量のLevi-Civita接続で与えられることを示した。さらに、この空間のBerwald接続は[To-Et]で導入された平均化された接続一致することも示している。

第4章は、Berwald接続から自然に概G-計量的な接続、すなわちRund接続が自然な形で定義できることを示した。さらにRund接続の捩率と曲率が満たす種々の公式を導いた。

第5章では、本学位論文の主要なテーマである共形的Finsler多様体の幾何学を纏めた。Riemann幾何学でよく知られたWeyl接続をFinsler幾何学に拡張したFinsler-Weyl接続を導入し、古くから用いられてきたWagner接続との関係を議論した。さらに、Finsler-Weyl接続の曲率が消滅することがFinsler多様体の共形的平坦性を与えることを示した。また、第2章で導入したRanders計量の共形的平坦性を議論した。

Summary of Doctoral Dissertation

Title of Doctoral Dissertation: Some Topics in Conformal Finsler Geometry

Name: Jenizon

This is a summary of the study of the conformal theory in Finsler geometry and the Finsler-Weyl structure which is a natural extension of Weyl structures in Riemannian geometry. In the last chapter we characterize conformal flatness of Finsler metrics and Randers metrics. The thesis is organized as follows.

Chapter 1 is about the preliminaries. First we shall explain Ehresmann connections and non-linear connections on tangent bundles, then we shall introduce a connection usually defined to be a covariant derivation which satisfies the Leibniz rule. In the last section we will discuss conformal classes, Weyl connections and Lyra connections.

In Chapter 2 we discuss some basic concepts of Finsler manifolds, such as Minkowski norms and Finsler metrics. There are many examples of Finsler manifolds, such as smooth manifold with Riemannian metrics and smooth manifold with Randers metrics, where a Randers metric is a typical non-Riemannian Finsler metric.

In Chapter 3 we discuss Berwald connections on Finsler manifolds. By a clever observation of Z. I. Szabó, if a Finsler manifold is a Berwald manifold, then its Berwald connection is induced from the Levi-Civita connection on a smooth manifold with a Riemannian metric, and such a Riemannian metric is given by the so-called averaged Riemannian metric obtained from the given Finsler function [Ma-Ra-Tr-Ze]. Landsberg manifolds also form a special class of Finsler manifolds, which includes Berwalds manifolds. Following [To-Et], we shall define the averaged connection obtained from the Berwald connection.

In Chapter 4 in the first section we introduce another Finsler connection which satisfies the almost G -compatibility, which is called the Rund connection. Curvature and torsion of Rund connection is also defined in the next section. We list up some identities concerning curvature and torsion as well.

In Chapter 5 we investigate geometry of conformal Finsler manifolds. We shall extend the notion of Weyl structures to the category of Finsler geometry, specifically the Finsler-Weyl connection and Wagner connection in Riemannian geometry. In the last section we shall discuss the conformal flatness of Finsler metrics and conformal flatness of Randers metrics.