

H_∞ 制御論による自動抽出制御則の改良

高田 等* 吉留 章** 八野 知博*

IMPROVEMENT OF AUTOMATIC CHOOSING CONTROL LAW BY H_∞ CONTROL THEORY

Hitoshi TAKATA , Akira YOSHIDOME and Tomohiro HACHINO

In this paper we consider an improvement in robustness of the automatic choosing control (ACC) for nonlinear systems. A linear model system with bounded errors is derived from the given system using the usual ACC. The conventional H_∞ control theory is applied to this linear model system to get the H_∞ control, which is added to the usual ACC to improve the stability of the total system. Two types of H_∞ control are presented here to illustrate this approach.

Keywords: Nonlinear control , ACC , Robust control , H_∞ control theory

1 はじめに

本論文では、非線形システムを制御する有効な手法のひとつであるロバスト型自動抽出制御法について考察する。これはまず、非線形システムを幾つかの領域に分割し、各領域ごとにテーラー展開一次近似することにより線形制御則を構成し、それぞれ原点を通るように原点補正をする。その各領域ごとの制御則に自動抽出関数を乗じて総和し、全領域を対象にした単一フィードバック制御則を構成する。次にこの自動抽出制御則¹⁾に H_∞ 制御論²⁾による制御補正量を追加する。この補正量により、自動抽出制御則がもつ最適制御との間の誤差に起因する補償が行われ、ロバスト性を高めることができる。

従来の自動抽出制御法は、理論的には、発生したモ

デル化誤差については何ら考慮されていなかった。そこで本稿では、発生したモデル化誤差を制御対象に存在する不確かさとみなして、追加補償のための安定な制御系を設計することを考える。この制御系設計に H_∞ 制御論を用いる。これは、あらかじめ補償用制御対象の誤差を考慮して設計する手法で、フィードバック制御によって外乱から制御量までの伝達関数の大きさを、ある値以下に抑制する制御のことである。この大きさを測るノルムとして、 H_∞ ノルムが用いられる。この追加補償制御ではロバスト安定化問題を陽に扱うことができ、また追加制御則の計算もリカッチ代数方程式を解くだけで比較的容易に求めることができる。その際、本論文においては、従来型自動抽出制御則の改善となる追加補償制御則合成のために、次の2種類の方法を提案した。一つは状態変数を直接利用する直接型改善法³⁾で、他は原システムとノミナルな近似モデルとの差を利用する誤差補償型改善法⁴⁾である。最後に数値シミュレーション実験でその有効性を確かめた。

2001年8月31日受理

* 電気電子工学科

** 博士前期課程電気電子工学専攻

2 自動抽出制御法

次の非線形システムの制御問題を考察する.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in \mathcal{D} \quad (1)$$

ただし, $\cdot = d/dt$, x : n 次元状態ベクトル, u : r 次元制御ベクトル, $f \in C^1$: $f(0) = 0$ の n 次元非線形ベクトル値関数, $g \in C^1$: $n \times r$ 行列関数, $\mathcal{D} \subset R^n$: 定義域.

評価関数として二次形式の

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q_i x + u^T R_i u) dt \quad (T \rightarrow \infty) \quad (2)$$

を選ぶ. ただし, Q_i : $r \times r$ 準正定値対称行列, R_i : $n \times n$ 正定値対称行列, である. $f(x)$ の非線形性を考慮して分離関数 $\{C_j(x)\}$ の列,

$$C = [C_1, \dots, C_L]^T : \mathcal{D} \rightarrow D \subset R^L$$

を定義する.

次に領域を $M+1$ 個の小領域に分割

$$D = \cup_{i=0}^M D_i$$

する. 各小領域 D_i 毎に, $f(x)$ を \hat{X}_i 点近傍で一次のテューラー展開近似する.

$$\dot{x} = A_i x + B_i u + W_i. \quad (3)$$

このときの(2)(3)式に対するLQ制御則は次式となる.

$$\hat{u}_i(x) = -R_i^{-1} B_i^T (P_i x - \xi_i) \quad (4)$$

ただし, P_i はリカッチ方程式:

$$P_i A_i + A_i^T P_i + Q_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i = 0 \quad (5)$$

の解の $n \times n$ 正定値対称行列であり, ξ_i は n 次元ベクトルの

$$\begin{cases} \xi_0 = 0 \\ \xi_i = (A_i^T - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T)^{-1} P_i W_i \end{cases} \quad (6)$$

である. (4) 式のLQ制御則は, $\xi_i \neq 0$ のとき原点において $\hat{u}_i(0) \neq 0$ なるバイアスがあるので,

原点補正関数:

$$\begin{cases} \beta_0(x) = 1 \\ \beta_i(x) = 1 - \exp(-x^T S_i x) \end{cases} \quad (7)$$

ただし, S_i は $n \times n$ の準正定値対称行列

を導入し, 次の原点補正

$$u_i(x) = \hat{u}_i(x) \beta_i(x) \quad (8)$$

を行う.

制御則 u_i の滑らかな切り替えを行うために, 領域 $D_i = \prod_{j=1}^L [a_{ij}, b_{ij}]$ を抽出する関数として次のシグモイド型自動抽出関数:

$$I_{iN}(x) = \prod_{j=1}^L I_{iN}(x; j) \quad (9)$$

$$I_{iN}(x; j) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(2N(C_j(x) - a_{ij})/h_j)} - \frac{1}{1 + \exp(-2N(C_j(x) - b_{ij})/h_j)} \quad (10)$$

を導入する. ただし, N は自然数, $h_j = (b_{ij} - a_{ij})/2$ である.

(8)(9)式を用いて全領域 \mathcal{D} 上で定義される次のフィードバック制御則が得られる.

$$u(x) = \sum_{i=0}^M u_i(x) I_{iN}(x). \quad (11)$$

これは, 領域毎に切り替えのない滑らかな単一フィードバック制御則である.

3 H_∞ 制御論による改善

\mathcal{D} 上で定義された(11)式の $u(x)$ はシステム(1)式に対する準最適制御則である. これにロバスト性を追加補償するために, H_∞ 制御論を用いた次の2種の制御則改善法を考察する. その一つは直接型改善法で, 他は誤差補償型改善法である. これを実現するため, (1)式の u に(11)式を代入し v を追加した

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u(x) + v) \quad (12)$$

を対象とする. ただし, v は r 次元補償用制御ベクトルである.

3.1 直接型改善法

(12)式を直接, 線形の

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 v \\ z = Dv \end{cases} \quad (13)$$

とモデル化することを考える. ただし

$$w = \Delta v, \quad D^T D = I$$

Δ : モデル化誤差, z : 評価出力

$$\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma \quad (\gamma > 0)$$

とする。これは、(12)式が(13)式の状態フィードバックによる H_∞ 制御問題に帰着されたことを意味する。よって、 H_∞ 制御論により追加補償量が

$$v = -B_2^T P x \quad (14)$$

で与えられる。ただし P はリカッチ代数方程式

$$PA + A^T P + P(B_1 B_1^T / \gamma^2 - B_2 B_2^T)P = 0 \quad (15)$$

の準正定解である。特に(13)式が単一入出力(SISO)表現できるシステムの場合は、周波数応答による線形モデル化が可能となる。

以下説明のため次の簡単なSISOシステムを考える。

$$x^{(n)} + f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) = B_2(u(x) + v). \quad (16)$$

$u(x)$ に(11)式を代入すれば

$$x^{(n)} + f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) - B_2 \sum_{i=0}^M u_i(x) I_{iN}(x) = B_2 v$$

となる。この線形モデル化式(13)が

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0 = B_1 w + B_2 v \quad (17)$$

である。ここでまず(16)式に対し $v = m \sin(\omega t)$ ($m \in R$) の入力に加え、その出力と角周波数 ω をボード線図に描き、周波数応答 $\tilde{G}(j\omega)$ を得る。次に、 $\tilde{G}(j\omega)$ に対する線形近似モデルの伝達関数

$$W(s) = \frac{x}{w} = \frac{B_1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

を作図してパラメータ値 (a_0, \dots, a_{n-1}, B_1) を定める。 $w = \Delta v$ なので(17)式は

$$\frac{x}{v} = \frac{B_1 \Delta(s) + B_2}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

となり、これを $\tilde{G}(s)$ に等しくおけば

$$\Delta(s) = \frac{\tilde{G}(s)\{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0\}}{B_1} - \frac{B_2}{B_1}$$

となる。よって $\|\Delta\|_\infty = \max(|\Delta(j\omega)| : 0 \leq \omega < \infty) = 1/\gamma$ が定まり H_∞ 制御問題を解くことができる。このときのブロック線図を図-1に示す。なお、正弦波入力の代わりにステップ入力の応答で、線形モデル化することも可能である。

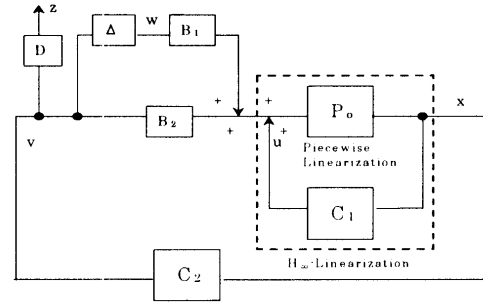


図-1. 直接型ブロック線図

3.2 誤差補償型改善法

システム(1)のプラントに対する近似プラントモデルを用いて、それぞれの出力の差を補償することを考える。

本節では簡単のため、(12)式の駆動行列 $g(x)$ が定係数行列 B の場合についてのみ考察する。従って

$$\dot{x} = f(x) + B(u(x) + v) \quad (18)$$

が対象システムである。これに対する近似プラントモデルとして

$$\dot{\bar{x}} = \hat{f}(\bar{x}) + B u(\bar{x}) \quad (19)$$

を導入する。プラントとモデルの出力差

$$\varepsilon = x - \bar{x}$$

に関するダイナミクスは

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{x} - \dot{\bar{x}} \\ &= f(x) + B\{u(x) + v\} - \{\hat{f}(\bar{x}) + B u(\bar{x})\} \\ &= f(x) - \hat{f}(\bar{x}) + B\{u(x) - u(\bar{x})\} + Bv \\ &= \{f(x) - \hat{f}(\bar{x})\} + \{B\{f(x) - \hat{f}(\bar{x})\} \\ &\quad + B\{u(x) - u(\bar{x})\}\} + Bv \end{aligned} \quad (20)$$

となる。この式を ε に関する線形の

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = A\varepsilon + B_1 w + B_2 v \\ z = Dv \end{cases} \quad (21)$$

とモデル化することを考える。ただし

$$B_2 = B, w = \Delta v, D^T D = I,$$

Δ : モデル化誤差, z : 評価出力

$$\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma.$$

これは(18)式が(19)式を介して(21)式の状態フィードバックによる H_∞ 制御問題に帰着されたことを意味

する. よって H_∞ 制御論による追加補正量が, (14)(15) 式と同様に

$$v = -B_2^T P \varepsilon \quad (22)$$

ただし

$$PA + A^T P + P(B_1 B_1^T / \gamma^2 - B_2 B_2^T) P = 0 \quad (23)$$

となる.

ここで, $\|\Delta\|_\infty$ すなわち γ の求め方について考察する. (19) 式の近似プラントモデルにおいて $\hat{f}(\bar{x})$ と $u(\bar{x})$ を

$$\hat{f}(\bar{x}) = \sum_{i=0}^M (A_i \bar{x} + W_i) \beta_i(x) I_i(x) \quad (24)$$

$$u(\bar{x}) = \sum_{i=0}^M \hat{u}_i(\bar{x}) \beta_i(x) I_i(x) \quad (25)$$

とする. これらを (19) 式に代入し整理すれば

$$\dot{\bar{x}} = \sum_{i=0}^M \{A_i \bar{x} + W_i + B \hat{u}_i(\bar{x})\} \beta_i(x) I_i(x)$$

となる. すなわち (4) 式を (3) 式に代入したときの重みつき和である. なお $\hat{f}(\bar{x})$ と $u(\bar{x})$ の $\beta_i(x) I_i(x)$ は, 実システム x の関数であり, よって \bar{x} の運動方程式に対する外部入力関数であることに注意する必要がある.

(20) 式は

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \{f(x) - \hat{f}(x)\} + \{\hat{f}(x) - \hat{f}(\bar{x})\} \\ &\quad + B \{u(x) - u(\bar{x})\} + Bv \\ &= \{f(x) - \hat{f}(x)\} \\ &\quad + \sum_{i=0}^M \{A_i \varepsilon + B \hat{u}_i(\varepsilon)\} \beta_i(x) I_i(x) + Bv \\ &= \Delta_2 x + (A + \Delta_1) \varepsilon + Bv \\ &= A \varepsilon + Bv + (\Delta_1 \varepsilon + \Delta_2 x) \\ &= A \varepsilon + B_1 w + B_2 v \end{aligned} \quad (26)$$

ただし

$$\begin{aligned} B_2 &= B, \quad B_1 = I, \quad w = \Delta_1 \varepsilon + \Delta_2 x = \Delta \eta \\ \Delta_1 \varepsilon &= \sum_{i=0}^M \{A_i \varepsilon + B \hat{u}_i(\varepsilon)\} \beta_i(x) I_i(x) - A \varepsilon \\ \Delta_2 x &= \{f(x) - \hat{f}(x)\} \quad (f(0) = \hat{f}(0) = 0) \\ \Delta &= [\Delta_1 \quad \Delta_2] \\ \eta &= \begin{bmatrix} \varepsilon \\ x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である.

この条件から $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ が以下のように求められる.

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_\infty &= \sup \frac{\|w\|_2}{\|\eta\|_2} = \sup \frac{\|\Delta \eta\|_2}{\|\eta\|_2} \\ &\leq \frac{\sqrt{\int_0^\infty (\lambda_{\max} \Delta^T \Delta) \eta^T \eta dt}}{\|\eta\|_2} \\ &= \sup_x \sqrt{\lambda_{\max}(\Delta^T \Delta)} \\ &= \sup_x \sqrt{\lambda_{\max} \begin{bmatrix} \Delta_1^T \Delta_1 & \Delta_1^T \Delta_2 \\ \Delta_2^T \Delta_1 & \Delta_2^T \Delta_2 \end{bmatrix}} \\ &= 1/\gamma. \end{aligned} \quad (27)$$

よって, (12) 式に対して (19)(22) 式から, 補償量を求めることができる. このときのブロック線図を図-2 に示す.

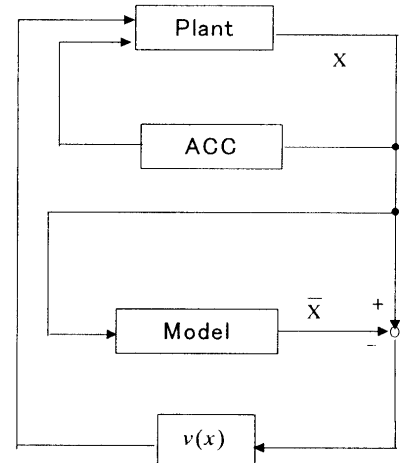


図-2. 誤差補償型ブロック線図

4 数値シミュレーション実験

次のシステム

$$\ddot{x} - a\dot{x} + a \sin x = u \quad [x, \dot{x}]^T \in \mathcal{D} = \mathcal{R}^2 \quad (28)$$

を考える. このシステムに対し, 従来の自動抽出制御法 (ACC) と本論文で提案した 2 種の手法の比較を行う. 以下 3.1 節の直接型改善法を NEW1, および 3.2 節の誤差補償型改善法を NEW2 と記す.

i) 2 分割の自動抽出制御 (ACC): $C(\mathcal{D}) = \{x\} = \mathcal{R}$, 領域: $\mathcal{D}_0 = (-\infty, \pi/2]$, $\mathcal{D}_1 = [\pi/2, \infty)$, $\hat{X}_0 = 0$, $\hat{X}_1 = 3\pi/4$, $N = 8$, $S_i = 10$.

ii) 本手法:

自動抽出制御の領域分割, テーラー展開点は上記 i) に

同じとした。NEW1における周波数応答を近似したモデルの係数は $a_1 = 1.732, a_2 = 1.287, B_1 = 0.974, \gamma = 1.54$ であり、NEW2におけるものは $\gamma = 0.250$ であった。

図-3～図-5は自動抽出制御ACCと、本手法NEW1とNEW2に対するシミュレーション結果である。図-3は初期値 $(x(0), \dot{x}(0))$ が $(3.0, 1.0)$ の時の時間応答、図-4は初期値が $(2.0, 2.0)$ の場合にシステムのパラメータを4秒から2.0と変動させた時(パラメータ変動1)の時間応答、図-5は図-4と同じ初期値でパラメータを最初は $a = 1.0$, 2秒から4秒は $a = 2.0$, 4秒から6秒は $a = -1.0$, 6秒以降は $a = 1.0$ と変動した場合(パラメータ変動2)の時間応答である。図-6と図-7はそれぞれ図-4と図-5の場合の H_∞ による補償制御量 v の時間応答である。

5 まとめ

従来の自動抽出制御則にロバスト性補償を行うため、 H_∞ 制御論を適用した手法を考察した。既存の自動抽出制御量適用後のシステムの、線形近似モデル化手法の違いに対応して、直接型改善法と誤差補償型改善法の2種を提案した。数値シミュレーション実験でその有効性を確かめた。

本手法は適用時に各種制限があるので、それらの改良は、今後に残された研究課題である。

参考文献

- 1) 高田, 八野, 松山: 「自動抽出制御法における自動抽出関数の最適設計法について」, 第49回電気関係学会九州支部連合大会, p.587 (1996)
- 2) 吉川, 井村: 「現代制御論」, 昭晃堂 (1996)
- 3) 高田, 吉留, 八野: 「 H_∞ 制御論による自動抽出制御則の改良について」, 第18回SICE九州支部学術講演会, pp.53-54 (1999)
- 4) 高田, 吉留, 八野, 坂元: 「ロバスト自動抽出制御則の合成について」, 第19回SICE九州支部学術講演会, pp.25-26 (2000)

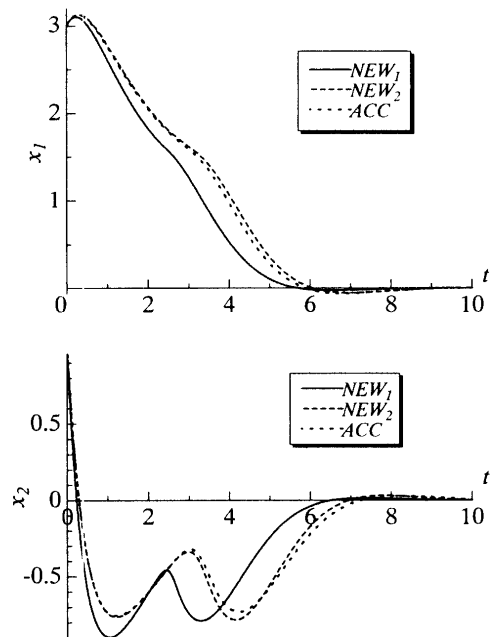


図-3. 初期値 $(3.0, 1.0)$ の時間応答

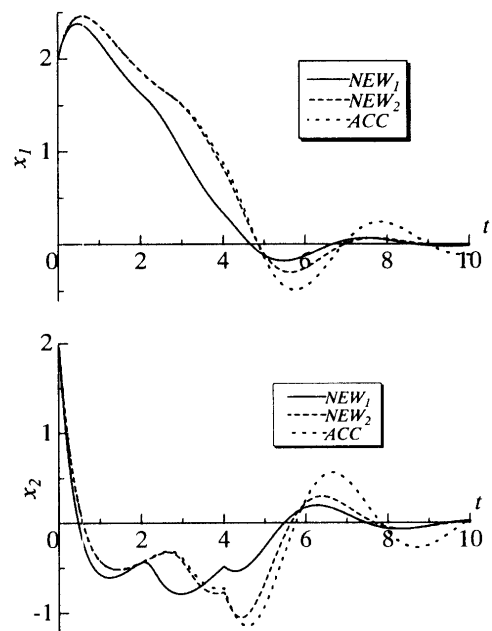


図-4. パラメータ変動1の時間応答(初期値 $(2.0, 2.0)$)

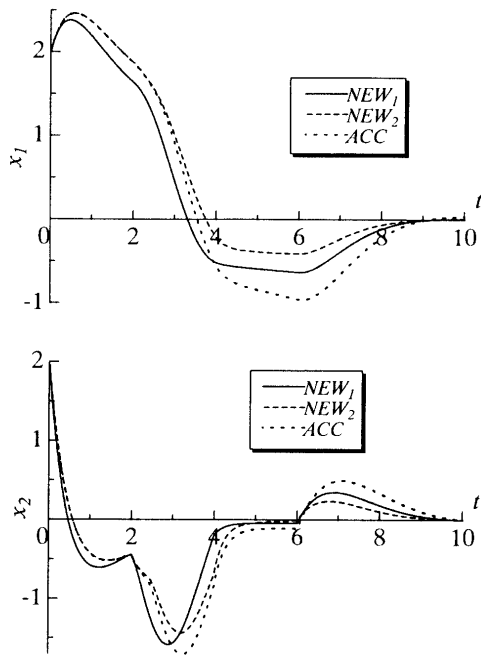


図-5. パラメータ変動2の時間応答(初期値(2.0,2.0))

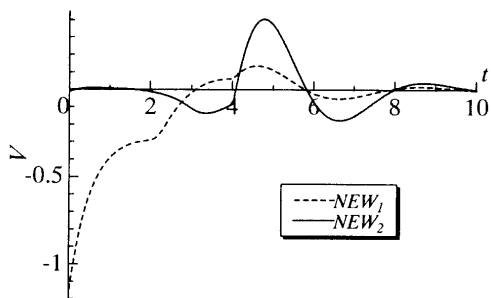


図-6. 図-4における v の時間応答

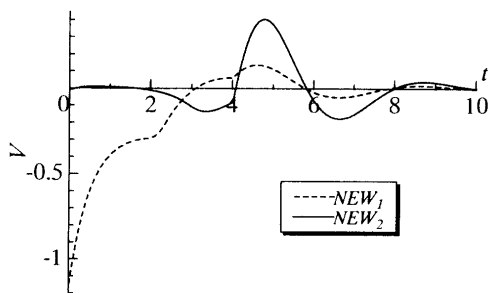


図-7. 図-5における v の時間応答